ميكانيكا الكم

الجزء الثانى

$$a_c = \frac{-\frac{i}{\hbar} H_{ca_o}\left[e^{\frac{i(E_c-E_{a_o})}{\hbar}} - e^{-\frac{\Gamma}{\hbar}t}\right]}{\frac{i}{\hbar}(E_c-E_{a_o}) + \frac{\Gamma}{\hbar}}.$$

$$\sigma_x^p\left((P)_+\right) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = (p)_-$$

$$\sigma_{(pp-d\pi^+)} = \frac{p_\pi^2}{V_p V_\pi}\left|H_{f,i}^{(1)}\right|^2 (2s_\pi+1)\ (2s_d+1)$$

دكتور

عبدالرحمن فكرى

استاذ الفيزياء النوويه والطاقة العاليه

كلية الهندسة

دكتور

محمد عبدالهادى العدوى

استاذ الفيزياء النظرية

كلية التربية

جامعة عين شمس

الطبعة الأولى

١٩٩٣

دار الحكيم للطباعة

اهداءات ٢٠٠٣

أ/ عبد الرحمن فكرى

الإسكندرية

ميكانيكا الكم

تأليـــف

دكتور

عبدالرحمن فكري

استاذ الفيزياء النوويه والطاقة العاليه

كلية الهندسة

دكتور

محمد عبدالهادي العدوي

استاذ الفيزياء النظرية

كلية التربية

جامعة عين شمس

الطبعة الأولى

١٩٩٣

دار الحكيم للطباعة

بسم الله الرحمن الرحيم

وبه نستعــــين

مقدمـــة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين • ونشكره سبحانه وتعالى ان وفقنا لتقديم هذا الكتاب " ميكانيكا الكم – الجزء الثانى " وهو الثالث فـي سلسلة الكتب التى نسأله تعالى ان يساعدنا فى اتمامها لتزويد القارىء العربى بكتب عربية علمية على المستوى الجامعى •

ومرة ثالثة راعينا ان نقدم هذا الكتاب باللغة العربية مع الابقاء على المعالجـات الرياضية والقوانين الفيزيائية بحروف اللغة الانجليزية وذلك لسببين سبق الاشارة لهما :

١ ـ ان نساعد القارىء على الاستفادة من المراجع الاجنبية المتاحة •

٢ ـ ان المؤلفات العلمية الاجنبية على اختلاف اللغة المستخدمة فى كتابتها تسـرد المعالجات الرياضية بحروف اللغة الانجليزية •

ونأمل باذن الله تعالى ان يجنى القارىء العربى الفائدة المرجوة من وراء كتابة هـذا المؤلف بهذه الصورة •

ويبدأ الكتاب بتقديم دلالة ديراك الخاصة بالتعبير عن الدوال الموجية والايجينية بصورة البرا والكت مع سرد بعض الاساسيات المرتبطه بهذا الاسلوب وتوضيحها ببعـض الامثلة • وفى الباب الثانى نبدأ تطبيق اسلوب دلالة ديراك على المعالجة الكميـــة لمسألة التذبذب التوافقى البسيط واستنتاج القيم الايجينية والدوال الايجينية المرتبطة بها مع حساب عناصر مصفوفات عاملة الازاحة وعاملة كمية التحرك الخطى لهذه المجموعـة الفيزيائية •

ثم يتم فى الباب الثالث تطبيق اسلوب دلالة ديراك لمسألة كمية التحرك الـزاوى واستنتاج كل من القيم الايجينية والدوال الايجينية لها وايضا حساب تراكيب عناصـــر مصفوفاتها •

وفى الباب الرابع يتم تلخيص نظرية ديراك الخاصة بحركة الالكترون فى مجـــال كهربى وتوضيح ان الحركة المغزلية الذاتية للجسيمات الاولية هى نتيجة طبيعيـــة لاساسيات النظرية النسبية الخاصة التى قدمها اينشتين • ثم نتبع ذلك فى البـــاب الخامس بمعالجة مسألة تقارن اثنين من متجهات كمية الحركة الزاوية •

اما الباب السادس فيشتمل على المعالجات التقريبية فى ميكانيكا الكم مع اعتبـــار تغير الزمن • بينما نفرد البابين السابع والثامن لمعالجة مسألة استطارة الجسيمـــات الاوليـة •

المؤلفان

عبدالرحمن فكرى و محمدعبدالهادى العدوى

جامعة عين شمس بالقاهرة

أول المحـرم ١٤١٣ هـ

٢ يوليـــو ١٩٩٢ م

فهـــرس

رقم الصفحة

بسم الله الرحمن الرحيم

الباب الاول

دلالة ديـــراك (Dirac Notation)

في هذا الباب الاول نبدأ بسرد بعض الاساسيات المرتبطة بالدوال الموجيـــة والعاملات الخطية التي تؤثر عليها وذلك في اطار أسلوب استحدثه العالم "ديـــراك" (Dirac) عام ١٩٢٨ • ومن المعتاد يُعرف هذا الاسلوب بدلالة ديـــــــــراك (Dirac Notation) •

مقدمـــة :

كلنا نعلم ان كثير من الكميات الفيزيائية (مثل الازاحة • السرعة • العجلـــة • كمية التحرك الخطي • القوة •••الخ) يُعبر عنها بمتجهات في الحيز الاحداثـــي المعتاد ويتميز كل منها بثلاث مركبات بالصورة المعتادة التالية حيث ترمز $\vec{r}$ للمتجـه الذى نتكلم عنه بينما x و y و z هي المركبات الخاصة بهذا المتجه فـــي اتجاهات الاحداثيات الثلاث $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ و $\vec{Z}$ التي تتميز بوحدات متجهـــات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ على التوالي :

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \qquad (1.1)$$

نعلم كذلك ان حاصل الضرب القياسي (Scalar Product) لمثل هذا المتجـــه هو :

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = r^2 = (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}) \cdot (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}) =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 \qquad (1.2)$$

هذا بالنسبة للمتجهات فى الحيز الاحداثى المعتاد $(\vec{Z}, \vec{Y}, \vec{X})$

أما بالنسبة لحيز متعدد الاحداثيات (وهو مانحتاج اليه فى اطار ميكانيكا الكم) فان معادلتى (1.1) و (1.2) تأخذان الصورتين التاليتين :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i \tag{1.3}$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \tag{1.4}$$

حيث x_i ترمز لمركبه المتجه (عبارة عن عدد) فى اتجاه وحدة المتجه $\vec{u}_i$ بينما تُكَوِّن تلك الوحدات $\vec{u}_i$ مايعرف بمجموعة القواعد لهذا الحيز • ولكل متجه مثل $\vec{x}$ من المناسب تصور تواجد متجه آخر $(x)^+$ ـ يسمى بالمتجه الموافق فى الحيز المقابل الذى يحتوى المتجهات $\vec{x}$ ويُعَبر عن $(\vec{x})^+$ بالصورة :

$$\vec{x}^* = \sum_{i}^{n} x_i^+ \vec{u}_i^+ \tag{1.4}$$

حيث x_i^+ المرافق المركب للعدد x_i بينما $\vec{u}_i^+$ هى الوحدات القاعدية للمتجهات الاحداثية فى الحيز المقابل • مع تذكرنا ان تلك الوحدات تتصف بالميزتين المعروفتين بميزة التعامدية (Orthogonality) وميزة العيارية (Normalization) ويعبر عنهما بواسطة العلاقة العامة التالية :

$$\vec{u}_i^+ \cdot \vec{u}_j = \delta_{ij} \tag{1.5}$$

بمعنى ان دلتا كرونكر δ_{ij} تساوى صفرا فى حالة عدم تساو i ، j بينما تساوى الوحدة فى حالة $i = j$ •

هذه العلاقات الاساسية للمتجهات يمكننا مقارنتها بأحد أهم خصائص الدالة الموجية ψ (Wave Function) بأنها يمكن التعبير عنها بدلالة مجموعة كاملة من الدوال :

$$\psi = \sum c_n u_n \qquad (1.6)$$

حيث الدوال u_n تقابل مسألة شرودنجر بشروطها الحدية الخاصة بها اى انهـــا حلول معادلة شرودنجر (Schrodinger Equation) :

$$\hat{H} u_n = E_n u_n \qquad (1.7)$$

وكالمعتاد يتم تعيين المعاملات c_n's فى (1.6) باستخدام خاصيتى المعايرة والتعامدية لتلك الدوال الايجينية u_n's (Eigenfunctions).

فعلى سبيل المثال اذا كان لدينا دالة موجية اختيارية ψ لها مَفكُوك بصورة :

$$\psi = \sum_m c_m u_m \qquad (1.8)$$

فانه بضرب جانبى هذه المعادلة بالدالة u_n^* واجراء التكامل على جميع الاحداثيات نحصل على :

$$\int u_n^* \psi \, dV = \int \sum_m c_m u_n^* u_m \, dV$$

$$= \sum_m c_m \delta_{nm} = c_n \qquad (1.9)$$

من ناحية أخرى فان خاصية التعامدية للدوال الايجنية تؤدى أيضا الى حل عام سهل لمعادلة شرودنجر بدلالة الزمن بدءًا بالمعادلة :

$$\hat{H} \psi = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = E_n \psi$$

$$\therefore \frac{d\psi}{\psi} = - \frac{i E_n}{\hbar} dt$$

$$\therefore \psi = \psi_0 e^{-\frac{i E_n}{\hbar} t} \qquad (1.10)$$

وبفرض أن
$$\sum_n c_n u_n = \psi_o$$

$$\therefore \psi = \sum_n c_n u_n e^{-\frac{i E_n}{\hbar} t} \qquad (1.11)$$

ويلاحظ انه بسبب كون معادلة شرودنجر هى معادلة ذات الرتبة الاولى بالنسبة لاحداثى الزمن فذلك يعنى امكانية تتبع السلوك المستقبلى للدالة ψ .

ونود أن نختتم هذه المقدمة بأن نسترجع خاصية اخرى للدالة الموجية وهى القيمة المتوسطة لأى عاملة خطية $\hat{F}$ " $\langle \hat{F} \rangle$ " ولنفرض أن $\hat{F}$ دالة لاحداثيات الموضع q_j واحداثيات كمية التحرك الخطى p_j . تبعا لتعريف القيمة المتوسطة لمثل هذه العاملة $\hat{F}$ نجد أن :

$$\langle \hat{F} \rangle = \int \psi^* \hat{F} \psi \, dV$$

$$= \int \psi^* [\hat{F} \psi] \, dV$$

$$= \int \sum_n \sum_m c_n^* c_m u_n^* \hat{F} u_m e^{\frac{i(E_n - E_m)t}{\hbar}} \, dV$$

$$= \sum_{n,m} c_n^* c_m F_{nm} e^{\frac{i(E_n - E_m)t}{h}} \qquad (1.12)$$

حيث

$$F_{nm} = \int u_n^* \hat{F} u_m \, dV \qquad (1.13)$$

أى أن

$$F_{nm} = \langle n | \hat{F} | m \rangle$$ = عنصر مصفوفة (Matrix Element) (1.14)

دلالة ديراك (Dirac Notation) :

حيث ان $\langle n | \hat{F} | m \rangle$ هو فى الحقيقة عنصر مصفوفة ما فانه يمكن اعتبار هذا العنصر ناتج من عملية ضرب مصفوفة افقية (Row Matrix) فى مصفوفة رأسية (Column Matrix) ولذلك اوضح ديراك ان أى حالة كمية خاصة بمجموعة ديناميكية عند لحظة زمنية ما يتم تمثيلها بنوع معين من المتجهات فى حيز متعدد الاحداثيات عبّر عنها ديراك بمتجهات الكِتْ (Ket Vectors) فمثلا متجه كت K يعنى مايلى ـ وهو مايقابل دوال موجية مثل u_m فى معادلة (1.8) :

$$|K\rangle = u_m = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{pmatrix} \equiv \text{Ket } K \qquad (1.15)$$

ويمتاز حيز متجهات الكت بأنه حيز اتجاهى خطى (Linear Vector Space) بمعنى ان أى جمع خطى منها ينتج عنه متجه كت آخر (راجع مثال (١ - ٣)) .

ولكى يتيسر اجراء عملية ضرب قياسى لمتجات الكت (بمفهوم معادلة (1.5)) تصوّر ديراك وُجود حيز اتجاهى آخر يقابل حيز متجهات الكت ولتمييزه عنه يعبر عن متجهاته بمتجهات أَلْبِرا (Bra Vectors) فمثلا متجه برا B يعنى مايلى ـ وهو مايقابل الدوال المرافقة u_n^* :

$$\langle B| \equiv u_n^* \equiv (u_1 \quad u_2 \cdot \ \dots \ u_n) \equiv \text{Bra } B \qquad (1.16)$$

وفيما يلى نُلخص بعض أساسيات " دلالة ديراك" كما قدمها ديراك فى ١٩٢٨ :

١ ـ أى جمع خطى لأى عدد من متجهات الكت ينتج عنه متجه كت جديد • فمثلا اذا أخذنا متجهى كت $|A\rangle$ ، $|B\rangle$ فان :

$$a\,|A\rangle + b\,|B\rangle = |Q\rangle \qquad (1.17)$$

حيث $|Q\rangle$ المتجه الناتج بينما يرمز a ، b الى اعداد مركبة اختيارية •

٢ ـ كمثال للتعبير عن المعادلات الايجينية بدلالة تلك المتجهات فان معادلة شرودنجر تأخذ الصورة العامة التالية :

$$\hat{H}\,|m\rangle = E_m\,|m\rangle \qquad (1.18)$$

حيث $|m\rangle$ الدالة الايجينية التى تنتمى لنقيمة الايجينية (Eigenvalue) E_m للعاملة الهاميلتونية $\hat{H}$ •

٣ ـ الصفة التى تميز متجه كت انه ايجينى تعتمد فقط على اتجاه هذا الكت بمعنى ان ضرب هذا الكت الايجينى فى أى عدد (لايساوى صفرا) ينتج عن ذلك كت ايجينى مرة أخرى يتبع نفس القيمة الايجينية • ويلاحظ ان ذلك هو من الفروق الاساسية بين نظرية الانطباق (Superposition Principle) بالمفهوم الكلاسيكى ومفهوم ميكانيكا الكم • كما ان الملحوظ المشار اليها بين القوسين (لايساوى صفرا) سببها ان متجه الكت " الصفرى " لايقابل أى حالة بالمرة فى ميكانيكا الكم (بينما فى الميكانيكا الكلاسيكية هذا مسموح به فمثلا فى حالة الخيط المتذبذب فان المتجه الصفرى يقابل خيطا فى حالة مستقرة •

٤ ـ تتبع متجهات الكت نفس القواعد التى تتبعها المصفوفات المكوّنة من صف رأسى واحد • بينما متجهات البرا تتبع القواعد الخاصة بالصفوفات المكونة من صف افقى واحد • فمثلا حاصل الضرب لمتجه البرا $\langle B|$ فى متجه الكت $|K\rangle$

من الناحية اليسرى لهذا الكت يؤدى الى (راجع معادلتى (1.15) ،
(1.16)) :

$$\langle B | K \rangle = (B_{11} \quad B_{12} \cdots B_m) \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ \vdots \\ K_{m1} \end{pmatrix}$$

$$= \left[B_{11}K_{11} + B_{12}K_{21} + \cdots + B_{1r}K_{r1} \right] = \text{عدد ما} \qquad (1.19)$$

بينما تتبع العاملات الخطية نفس القواعد التى تتبعها الصفوفات المربعة (Square Matrices) • وعلى ذلك فان حاصل ضرب عاملة خطية مثل $\hat{\alpha}$ فى متجه برا مثل $\langle B|$ من الناحية اليسرى لهذا البرا ليس له معنى • بينما حاصل ضرب $\hat{\alpha}$ فى متجه كت مثل $|K\rangle$ من الناحية اليسرى له هو :

$$|K\rangle = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & \cdots \\ 21 & 22 & 23 & \cdots \\ 31 & 32 & 33 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}_{11}K_{11} + & {}_{12}K_{21} + & {}_{13}K_{31} + \cdots + \cdots \\ {}_{21}K_{11} + & {}_{22}K_{21} + & {}_{23}K_{31} + \cdots + \cdots \\ {}_{31}K_{11} + & {}_{32}K_{21} + & {}_{33}K_{31} + \cdots + \cdots \\ & \vdots & \quad . \end{pmatrix} = |K'\rangle \qquad (1.20)$$

حيث رمزنا لمتجه الكت الناتج من حاصل الضرب $\alpha|K\rangle$ بالرمز $|K'\rangle$
ويمكن جعل العاملة الخطية مثل α التأثير على متجه برا مثل $\langle B|$
لاعطاء نتيجة ذات معنى بأن تكتب بالصورة ($\langle B|\alpha$) باعتبار الغرض التالي :

$$\left\{ \langle B|\alpha \right\} |K\rangle = \langle B| \left\{ \alpha|K\rangle \right\} \qquad (1.21)$$

لأي متجه كت $|K\rangle$ (هذا الافتراض يعبر عن مبدأ الضرب المقترن لكل من $|K\rangle$ و α و $\langle B|$ وكذلك بالنسبة لأي عدد من العاملات الخطية مثلما في حالة $\langle B|\alpha\ \beta\ \gamma|K\rangle$) .

كذلك نستفيد من مبدأ الضرب المقترن لاتمام حاصل الضرب $|K\rangle\ \langle B|$ بالنسبة لأي متجه برا $\langle B|$ ومتجه كت $|K\rangle$ وذلك بأن نتصور أن $\{|K\rangle\langle B|\}$ عبارة عن عاملة خطية والسماح لها بالتأثير على اى متجه كت آخر وليكن $|Q\rangle$ فنجد أن :

$$\left\{ |K\rangle\langle B| \right\} |Q\rangle = |K\rangle \left\{ \langle B|Q\rangle \right\}$$

وبما ان $\langle B|Q\rangle$ ينتج عنه اى عدد ما وليكن C (راجع معادلة (1.19)) :

$$\therefore \left\{ |K\rangle\langle B| \right\} |Q\rangle = |K\rangle C = C|K\rangle = |K''\rangle \quad (1.22)$$

وهذه النتيجة توضح المقولة التى اشرنا اليها بأن نتصور $\{|K\rangle\langle B|\}$ كعاملة خطية (راجع معادلة (1.20)) اذ أن $\{|K\rangle\langle B|\}$ عندما أثرت على أي متجه كت اختيارى نتج عن ذلك متجه كت آخر $C|K\rangle$ (أو $|K''\rangle$) .

٥ — كما أشرنا فى صفحة (٦) بما أن $|K\rangle$ و $C|K\rangle$ تقابلان نفس الحالة الكمية فانه لتحديد هذا التقابل بصورة واضحة فان الحالة الكمية لأى نظام ديناميكى

تحدد بتحقيق شرط معايرة متجهات الكت التى تمثل تلك الحالة • وهـــــذا الشرط يتلخص فى المعادلة :

$$\langle K | K \rangle = 1 \tag{1.23}$$

(هذه المعادلة يتضح لنا ماتعنيه اذا ماتذكرنا ان $\langle n | m \rangle = u_n^* u_m$ عبارة عن حاصل ضرب قياسى لهاتين المصفوفتين وبالتالى تجعلنا نعتبر على سبيل المثال $\langle x | \psi \rangle$ على انه يمثل المركبة السينية لحالة المتجه $|\psi\rangle$ وهنا فقط يكون لدينا عدد لانهائى من المركبات تقابل القيم المتصلة للمتغـــير x والتى تشترك مع بعضها لتكوين دالة الحالة $\psi(x)$ وعلى ذلك عبّر ديـراك عن ذلك بالعلاقة $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ وحيث ان الصفة العياريـــة للدالة تنص على $\int \psi^*(x)\psi(x)\, dx = 1$ فان تلك الصفة يمكـــن اعادة كتابتها بالاسلوب التالى :

$$\int \psi^*(x)\psi(x)\, dx = \int \langle \psi | x \rangle \langle x | \psi \rangle\, dx$$
$$= \int \left| \langle \psi | x \rangle \right|^2 dx = \int \langle \psi | \psi \rangle\, dx = 1$$

وفى المعتاد يختصر كتابة هذه النتيجة على النحو التالى وكما جاء فى (1.23): $\left(\langle \psi | \psi \rangle = 1 \right)$ مع ملاحظة ان هذا الشرط يسمح بضرب المتجهـــات فى معامل خاص بالطور مثل $|\exp(j\delta)|$ حيث δ كمية حقيقية •

٦ ـ اذا ماتحقق لأى متجه كت $| K \rangle$ النتيجة التالية :

$$\langle K | \alpha | K \rangle = 0 \tag{1.24}$$

فان هذا يعنى ان العاملة α مساوية للصفر •

بينما اذا تحقق الشرط :

$$\langle K | \alpha | K \rangle = \langle K | \beta | K \rangle \tag{1.25}$$

فان هذا يعنى ان العاملتين الخطيتين α و β متساويتان •

٧ ــ اذا كان لدينا اى عاملتين $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ وحققتا الشرطين التاليين لأى متجه كت $|K\rangle$ فان ذلك يعنى أن هاتين العاملتين خطيتان :

$$(\hat{\alpha}+\hat{\beta})|K\rangle = \hat{\alpha}|K\rangle + \hat{\beta}|K\rangle \qquad (1.26)$$

$$\left\{\hat{\alpha}\hat{\beta}\right\}|K\rangle = \hat{\alpha}\left\{\hat{\beta}|K\rangle\right\} = \hat{\alpha}\hat{\beta}|K\rangle \qquad (1.27)$$

مع ملاحظة أن :

$$\hat{\alpha}\hat{\beta}|K\rangle \neq \hat{\beta}\hat{\alpha}|K\rangle$$

إلاّ إذا تبادل $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ مع بعضهما حينئذ يكون :

$$\hat{\alpha}\hat{\beta}|K\rangle = \hat{\beta}\hat{\alpha}|K\rangle, \quad \hat{\alpha}\hat{\beta} - \hat{\beta}\hat{\alpha} = 0$$

٨ ــ لاتصلح العاملة مثل $\hat{\alpha}$ لتمثيل اى مشاهدة فيزيائية الا اذا حققت العلاقة التالية لأى دالتين موجيتين مثل $|\phi\rangle$ و $|\psi\rangle$:

$$\langle\phi|\hat{\alpha}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{\alpha}|\phi\rangle^* \qquad (1.28)$$

٩ ــ الدوال الايجينية التى تنتمى الى قيم ايجينية مختلفة لعاملة مـا تكون متعامـدة بمعنى ان اذا كان :

$$\hat{\alpha}|a_1\rangle = a_1|a_1\rangle, \quad \hat{\alpha}|a_2\rangle = a_2|a_2\rangle$$

$$\therefore \quad \langle a_2|a_1\rangle = 0 \qquad (1.29)$$

١٠ــ بما ان متجه الكت $|K\rangle$ المرافق له هو متجه البرا $\langle K|$ وأيضا $|p\rangle$ المرافق له $\langle P|$ فان حاصل الضرب القياسى $\langle K|P\rangle$ هو المرافــق لحاصل الضرب القياسى $\langle P|K\rangle$ بمعنى أن :

$$\langle K|P\rangle = \overline{\langle P|K\rangle} \qquad (1.30)$$

بينما تُعَرَّف المرافقة المركبة (او الأدجوينت Adjoint) لعاملة خطية بالعلاقة التالية :

$$\langle K | \hat{\bar{\alpha}} | P \rangle = \overline{\langle P | \hat{\alpha} | K \rangle} \qquad (1.31)$$

وفي حالة المتغير الديناميكي الحقيقي فان $\hat{\alpha} = \hat{\bar{\alpha}}$ أى أن : $\langle K | \hat{\alpha} | P \rangle = \overline{\langle P | \hat{\alpha} | K \rangle}$ وعلى ذلك فان المصفوفات التى تمثـــل المتغير الديناميكي الحقيقي هي مصفوفات هيرميتيـــة (Hermetian Matrices) .

مثـــال (١ — ١) :

أوجد ماتؤول اليه المرافقة لحاصل الضرب $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ لعاملتين خطيتيـــن $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$.

الحـــل :

لنفرض أن : $\hat{\alpha} | K \rangle = | P \rangle$

إذاً من تعريف المرافقة المركبة للعاملة $\hat{\alpha}$: $\langle K | \hat{\bar{\alpha}} | B \rangle = \overline{\langle B | \hat{\alpha} | K \rangle}$

وبوضع $\hat{\alpha} | K \rangle = | P \rangle$:

$$\therefore \langle K | \hat{\bar{\alpha}} | B \rangle = \overline{\langle B | \hat{\alpha} | K \rangle} = \overline{\langle B | P \rangle} = \langle P | B \rangle$$

$$\therefore \left\{ \left[\langle K | \hat{\bar{\alpha}} \right] | B \right\} = \langle P | B \rangle$$

وبما ان هذه النتيجة صحيحة لأى متجه كت $| B \rangle$

$$\therefore \langle K | \hat{\bar{\alpha}} = \langle P |$$

ولكن $\langle P |$ هى المرافقة المركبة للكت $| P \rangle$ اى المرافقة المركبة للكت $\alpha | K \rangle$

$$\therefore \langle P| = \overline{|P\rangle} = \overline{\alpha | K\rangle} = \langle K | \bar{\alpha}$$

وبالمثل : بوضع $\quad |Q\rangle = \beta | K\rangle$

فهذا معناه أن :

$$\overline{\alpha | Q\rangle} = \{\langle Q |\} \bar{\alpha} = \{\langle K|\bar{\beta}\} \bar{\alpha}$$

$$\therefore \overline{\alpha \beta | K\rangle} = \langle K|\bar{\beta} \bar{\alpha}$$

$$\therefore \overline{\alpha \beta} = \bar{\beta} \bar{\alpha} \tag{1.32}$$

<u>مثال (١ ـ ٢) :</u>

اثبت نظرية التعامدية المعبر عنها في معادلة (1.29) .

<u>الحل :</u>

بما أن $\quad \alpha | a_1\rangle = a_1 | a_1\rangle \quad$ و $\quad \alpha | a_2\rangle = a_2 | a_2\rangle$

اذا بضرب المعادلة الاولى في البرا $\langle a_2 |$ من جهة اليسار وكذلك المعادلة الثانية في البرا $\langle a_1 |$ نحصل على :

$$\langle a_2| \alpha |a_1 \rangle = \langle a_2|a_1|a_1 \rangle = a_1 \langle a_2|a_1\rangle \tag{1.33}$$

$$\langle a_1| \alpha |a_2 \rangle = \langle a_1|a_2|a_2 \rangle = a_2 \langle a_1|a_2\rangle \tag{1.34}$$

وبأخذ المرافقة للمعادلة (1.34) ومع تذكرنا أن a_2 حقيقية :

$$\therefore \langle a_2| \alpha | a_1\rangle = a_2\langle a_2|a_1 \rangle \tag{1.35}$$

وبطرح معادلة (1.35) من معادلة (1.33) :

$$\therefore (a_1 - a_2) \langle a_2 | a_1 \rangle = \langle a_2 | \alpha | a_1 \rangle - \langle a_2 | \alpha | a_1 \rangle = 0$$

وبما ان $a_2 \neq a_1$:

$$\therefore \langle a_2 | a_1 \rangle = 0 \qquad (1.29)$$

مثال (١ _ ٣) :

اثبت أن أي جمع خطي لاثنين من متجهات الكت الايجينية التي تتبع قيمة ايجينيـــة واحدة ينتج عنه متجه كت أيجيني آخر يتبع نفس القيمة الايجينية •

الحـــل :

لنفرض أن :

$$C_1 | K_1 \rangle + C_2 | K_2 \rangle = | Q \rangle \qquad (1.36)$$

حيث : $\alpha | K_1 \rangle = a | K_1 \rangle$ و $\alpha | K_2 \rangle = a | K_2 \rangle$ ، وبضـــرب المعادلة (1.36) في α نحصل على :

$$\alpha | Q \rangle = \alpha C_1 | K_1 \rangle + \alpha C_2 | K_2 \rangle$$

$$= C_1 \alpha | K_1 \rangle + C_2 \alpha | K_2 \rangle$$

$$= C_1 a | K_1 \rangle + C_2 a | K_2 \rangle$$

$$= a \{ C_1 | K_1 \rangle + C_2 | K_2 \rangle \}$$

$$= a | Q \rangle$$

أى أن الكت الايجينى $\langle Q|$ ـ وهو حاصل الجمع الخطى للكت الايجينى $\langle K_1|$ والكت الايجينى $\langle K_2|$ التابعتان للقيمة الايجينية a ـ هو كت ايجينى ايضا يتبع نفس القيمة الايجينية a •

مثال (١ ـ ٤) :

وضح أن اذا كانت متجهات الكت الايجينية $\langle n|$ لأى عاملة خطية تحقق الشروط الثلاث التالية :

ـ انها تكون مجموعة كاملة (complete set) بمعنى ان أى متجه كت اختيارى $\langle K|$ يمكن التعبير عنه بدلالة الجمع الخطى لمتجهات الكت الايجينية $\langle n|$:

$$|K\rangle = \sum_n a_n|n\rangle \tag{1.37}$$

حيث a_n فى معادلة (1.37) ثوابت •

ـ انها تتصف بخاصية المعايرة والتعامدية (Orthonormality) بمعنى انها تحقق العلاقة التالية :

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm} \tag{1.38}$$

ـ كل من تلك المتجهات الكت الايجينية $\langle n|$ مستقل خطيا عن الآخر بمعنى عدم امكانية التعبير عن واحد منها بدلالة الاخر اى ان اذا تحقق العلاقة الرياضية التالية $\sum_n a_n|n\rangle = 0$ يكون معنى ذلك ان كل حد من هذا المجموع يساوى صفرا وحينئذ يكون الثابت a_n المقابل مساويا للصفر •

وضح ان اذا تحققت تلك الشروط فان :

$$\sum_{n} \left|n\right\rangle\left\langle n\right| = 1 \qquad (1.39)$$

حيث 1 يُعبّر عن العاملة الخطية المساوية للوحدة •

<u>الحــل :</u>

بما أن :
$$\left|K\right\rangle = \sum_{n} a_n \left|n\right\rangle$$

وبضرب هذه المعادلة من جهة اليسار في متجه البرا الايجيني $\left\langle m\right|$:

$$\therefore \left\langle m \middle| K\right\rangle = \left\langle m\right| \left\{\sum_{n} a_n \left|n\right\rangle\right\}$$

$$= \sum a_n \left\langle m \middle| n\right\rangle = \sum a_n \, \delta_{mn} = a_m$$

راجع معادلة (1.38) • وبالمثل :

$$\left\langle n \middle| K\right\rangle = a_n$$

$$\therefore \left|K\right\rangle = \sum \left\{\left\langle n \middle| K\right\rangle\right\} \left|n\right\rangle = \sum \left|n\right\rangle \left\langle n \middle| K\right\rangle$$

$$= \sum \left\{\left|n\right\rangle \left\langle n\right|\right\} \left|K\right\rangle$$

$$\therefore \sum \left|n\right\rangle\left\langle n\right| = 1 \qquad (1.40)$$

بسم الله الرحمن الرحيم

الباب الثانى

المعالجة الكمية للمتذبذب التوافقى البسيط فى اطـــار دلالـة ديـــراك

نود فى هذا الباب استخدام دلالة ديراك لاستنتاج مستويات الطاقة للمتذبذب التوافقى البسيط وبعدها الدوال الموجية الخاصة به .

نعلم ان العاملة $\hat{H}$ الهاميلتونية الخاصة بالمتذبذب التوافقى البسيط هى :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 \hat{x}^2 \qquad (2.1)$$

حيث $\hat{x}$ عاملة الازاحة (Displacement Operator)

ω السرعة الزاوية للمتذبذب التوافقى

m كتلة المتذبذب التوافقى البسيط

$\hat{p}$ (أو $\hat{p}_x$) عاملة كمية التحرك الخطى

ولنكتب هذه المعادلة بالصورة التالية :

$$\hat{H} = \left(\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{m}{2}}\,\omega\hat{x}\right)^2 \qquad (2.1)$$

فاذا ماعرفنا عاملتين $\hat{a}$ ، $\hat{a}^+$ بما يلى :

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m}{2}}\,\omega\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} \qquad (2.2)$$

$$\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m}{2}}\,\omega\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} \qquad (2.3)$$

واذا ماتذكرنا ان علاقة التبادل بين العاملتين $\hat{x}$ و $\hat{p}$ هى :

$$\left[\hat{x}, \hat{p} \right] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i \hbar \qquad (2.4)$$

فان التعويض المباشر عن العاملتين $\hat{a}$ و $\hat{a}^+$ يُعطينا :

$$\hat{a}\,\hat{a}^+ = \left[\sqrt{\frac{m}{2}}\,\omega\,\hat{x} + i\,\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} \right] \cdot \left[\sqrt{\frac{m}{2}}\,\omega\,\hat{x} - i\,\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} \right]$$

$$= \left(\frac{m}{2}\,\omega^2\,\hat{x}^2 + \frac{p^2}{2m}\right) - \frac{i\omega}{2}\,(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})$$

$$\therefore \quad \hat{a}\hat{a}^+ = \hat{H} + \tfrac{1}{2}\,\hbar\,\omega \qquad (2.5)$$

وبالمثل فان :

$$\hat{a}^+\,a = \hat{H} - \tfrac{1}{2}\,\hbar\omega \qquad (2.6)$$

$$\therefore \left[\hat{a}, \hat{a}^+ \right] = \hat{a}\,\hat{a}^+ - \hat{a}^+\,\hat{a}$$

$$= \hat{H} + \tfrac{1}{2}\,\hbar\omega - (\hat{H} - \tfrac{1}{2}\,\hbar\,\omega)$$

$$\therefore \left[\hat{a}, \hat{a}^+ \right] = \hbar\,\omega \qquad (2.7)$$

ومما درسناه فى الباب الاول فان المعادلة الايجينية للحالة الكمية $|E_n\rangle$ هى :

$$\hat{H}\,|E_n\rangle = E_n\,|E_n\rangle \qquad (2.8)$$

بينما هذه الحالة $|E_n\rangle$ اذا ما أثرنا عليها بالعاملة $(\hat{a}\,\hat{a}^+)$ تؤدى الى :

$$\hat{a}\,\hat{a}^{+}\left|E_n\right\rangle = (\hat{H} + \tfrac{1}{2}\hbar\omega)\left|E_n\right\rangle$$

$$= \hat{H}\left|E_n\right\rangle + \tfrac{1}{2}\cdot\hbar\omega\left|E_n\right\rangle$$

$$= (E_n + \tfrac{1}{2}\cdot\hbar\omega)\left|E_n\right\rangle \qquad (2.9)$$

وبالمثل

$$\hat{a}^{+}\,\hat{a}\left|E_n\right\rangle = (E_n - \tfrac{1}{2}\cdot\hbar\omega)\left|E_n\right\rangle \qquad (2.10)$$

وبضرب (2.11) بالعاملة $\hat{a}^{+}$:

$$\hat{a}^{+}\hat{a}\hat{a}^{+}\left|E_n\right\rangle = (E_n + \tfrac{1}{2}\cdot\hbar\omega)\,\hat{a}^{+}\left|E_n\right\rangle \qquad (2.11)$$

$$\therefore\quad \hat{a}^{+}\hat{a}\left\{\hat{a}^{+}\left|E_n\right\rangle\right\} = (E_n + \tfrac{1}{2}\cdot\hbar\omega)\left\{\hat{a}^{+}\left|E_n\right\rangle\right\} \qquad (2.12)$$

وبمقارنة (2.12) بالمعادلة (2.9) نلاحظ اما أن :

$$\hat{a}^{+}\left|E_n\right\rangle = 0 \qquad (2.13)$$

أو أن :

$$\hat{a}^{+}\left|E_n\right\rangle = \left|E_{n+1}\right\rangle \qquad (2.14)$$

وعليه تصبح العلاقة (2.12) :

$$\hat{a}^{+}\hat{a}\left|E_{n+1}\right\rangle = \left[(E_n + \hbar\omega) - \tfrac{1}{2}\cdot\hbar\omega\right]\left|E_{n+1}\right\rangle \qquad (2.15)$$

وهى نفس المعادلة : $\hat{a}^{+}\hat{a}\left|E_n\right\rangle = (E_n - \tfrac{1}{2}\hbar\omega)\left|E_n\right\rangle$ على اعتبار

$$E_{n+1} = E_n + \hbar\omega \qquad (2.16)$$

ومعنى ذلك انه اذا أعطينا ان متجه ايجينى (حالة ايجينية) $\left| E_n \right\rangle$
فمن الممكن توليد متجه ايجينى جديد $\left| E_{n+1} \right\rangle$ عن طريق :

$$\hat{a}^+ \left| E_n \right\rangle = \left| E_{n+1} \right\rangle$$

حيث الحالة الايجينية $\left| E_{n+1} \right\rangle$ تنتمى للقيمة الايجينية :

$$E_{n+1} = E_n + \hbar\omega \qquad (2.16)$$

الا اذا حدث ان كان E_n هو أعلى مستوى للطاقة • وفى هذه الحالة فــــان المعادلة التالية تتحقق :

$$\hat{a}^+ \left| E_n \right\rangle = 0 \qquad (2.13)$$

ولكن يلاحظ أن شكل الجهد للمتذبذب التوافقى البسيط لايتصف بحد أقصى لمستويات الطاقة اذ أن عملية توليد مستوى طاقة عما تم الوصول اليه دائما ممكنة •

بنفس الاسلوب بضرب (2.10) فى العاملة $\hat{a}$ نحصل على :

$$\hat{a}\hat{a}^+\hat{a} \left| E_n \right\rangle = (E_n - \tfrac{1}{2}\hbar\omega)\, \hat{a} \left| E_n \right\rangle \qquad (2.17)$$

وهذا بالتالى يؤدى الى اما ان :

$$\hat{a} \left| E_n \right\rangle = 0 \qquad (2.18)$$

أو

$$\hat{a} \left| E_n \right\rangle = \left| E_{n-1} \right\rangle \qquad (2.19)$$

وهذه النتيجة معناها امكانية اعادة كتابة معادلة (2.17) بالصورة :

$$\hat{a}\hat{a}^+ \left| E_{n-1} \right\rangle = \left[(E_n - \hbar\omega) + \tfrac{1}{2}\hbar\omega \right] \left| E_{n-1} \right\rangle \qquad (2.19)$$

وهى معادلة (2.9) للحالة E_{n-1} على اعتبار أن الطاقة E_{n-1} تســـاوى $(E_n - \hbar\omega)$ وهذا معناه ان اذا بدأنا بأى حالة كمية ايجينية $\left| E_n \right\rangle$ فمــن

الممكن توليد حالة ايجينية جديدة $\left|E_{n-1}\right\rangle$ عن طريق :

$$\hat{a}\left|E_n\right\rangle = \left|E_{n-1}\right\rangle \qquad (2.19)$$

الا اذا كانت الحالة $\left|E_n\right\rangle$ تقابل الحالة الارضية $\left|E_o\right\rangle$ "Ground State"
وحينئذ يتحقق الشرط التالى :

$$\hat{a}\left|E_n\right\rangle = 0 \qquad (2.18)$$

وعليه فاننا نجد من العلاقة (2.10) ان العدد الكمى n يساوى صفـــــرا ـ $(E_o - \frac{1}{2}(\hbar\omega)) = 0$ ـ وهذا يحدد طاقة الحالة الارضية •
فى نفس الوقت فان معادلة (2.16) توضح ان :

$$E_1 = E_{o+1} = E_o + \hbar\omega = \tfrac{1}{2}\cdot\hbar\omega + \hbar\omega = \tfrac{3}{2}\,\hbar\omega \qquad (2.20)$$

$$E_2 = E_{1+1} = E_1 + \hbar\omega = \tfrac{5}{2}\,\hbar\omega \qquad (2.21)$$

أى ان طاقة اى مستوى عموما تعطى بالعلاقة :

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})\,\hbar\omega \qquad (2.22)$$

حيث n يساوى 0 و 1 و 2 و •••• الخ •

ونلاحظ مما سبق ان العاملة $\hat{a}$ تؤدى الى تلاشى الطاقة بكمات متتابعــــة فى كل مرة يكون الكم المتلاشى مقداره ($\hbar\omega$) ولذلك تسمى العاملة $\hat{a}$ بعاملــة "هدم" Annihilation او عاملة خفض Lowering • بينما العاملــة $\hat{a}^+$ تؤدى الى زيادة الطاقة بكمات متتابعة فى كل مرة يكون الكم المتولد مقـــــداره ($\hbar\omega$) ولذلك تسمى العاملة $\hat{a}^+$ بعاملة "توليد" Creation Operator أو عاملـــــة رفع Raising Operator •

بعدما درسنا كيفية استنتاج القيم الايجينية لمستويات الطاقة الخاصة بالمتذبذب التوافقى البسيط (معادلة (2.22)) نحاول الآن دراسة كيفية استنتاج الـــــدوال

الخاصة بالمتذبذب التوافقي • ولتبسيط المعالجة الرياضية نكتب بعض المعادلات التي سبق لنا التعرض لها بالاسلوب التالي :

$$\hat{H}\left|E_n\right\rangle = E_n\left|E_n\right\rangle \Rightarrow \hat{H}\left|n\right\rangle = (n + \tfrac{1}{2})\,\hbar\omega\,\left|n\right\rangle \quad (2.8')$$

حيث مفترضين أن تلك الدوال تتصف بخاصيتي المعايرة والتعامدية (راجع معادلـــة) :

$$\left\langle m \middle| n \right\rangle = \delta_{mn} \quad (1.\ \ )$$

وكذلك لدينا :

$$\hat{H}\left\{\hat{a}\left|n\right\rangle\right\} = (n - \tfrac{1}{2})\,\hbar\omega\,\left\{a\left|n\right\rangle\right\} \quad (2.23)$$

أي ان $\left\{a\left|n\right\rangle\right\}$ كت ايجيني ينتمي للقيمة الايجينيــة " $(n - \tfrac{1}{2})\cdot\hbar\omega$ " وهذا معناه ان الكت $a\left|n\right\rangle$ حاصل ضرب عدد ما (وليكن b_n) في الكـــــت $n-1$ أي أن :

$$\hat{a}\left|n\right\rangle = b_n\left|n-1\right\rangle \quad (2.24)$$

ولكي يتم تعيين b_n نحسب مربع طول المتجه $\hat{a}\left|n\right\rangle$ أي نحسب :

$$\left\langle n\middle|\hat{a}^{+}\hat{a}\middle|n\right\rangle = \left\langle n-1\middle|b_n^2\middle|n-1\right\rangle = b_n^2\left\langle n-1\middle|n-1\right\rangle = b_n^2 \quad (2.25)$$

ولكي نحسب الطرف الأيسر من (2.25) نستفيد من العلاقة ($\hat{a}^{+}\hat{a} = \hat{H} - \tfrac{1}{2}\cdot\hbar\omega$) — راجع معادلة (2.10) — كما يلي :

$$\left\langle n\middle|\hat{a}^{+}\hat{a}\middle|n\right\rangle = \left\langle n\middle|(\hat{H} - \tfrac{1}{2}\cdot\hbar\omega)\middle|n\right\rangle = \left\langle n\middle|\left\{(n+\tfrac{1}{2})\,\hbar\omega - \tfrac{1}{2}\cdot\hbar\omega\right\}\middle|n\right\rangle$$

$$= n\,\hbar\omega\left\langle n\middle|n\right\rangle = n\,\hbar\omega \quad (2.26)$$

$$\therefore\ b_n^2 = n\,\hbar\omega \quad (2.27)$$

$$\therefore\ \hat{a}\left|n\right\rangle = \sqrt{n\,\hbar\omega}\,\left|n-1\right\rangle \quad (2.28)$$

وبالمثل :

$$\hat{a}^+ \left| n \right\rangle = \left\{ \sqrt{n+1} \; \left| n+1 \right\rangle \right\} \sqrt{\hbar\omega} \qquad (2.29)$$

وبذلك على سبيل المثال :

$$\hat{a}^+ \left| 0 \right\rangle = \sqrt{0+1} \left\{ \hbar\omega \right\}^{1/2} \left| 0+1 \right\rangle = \sqrt{1} \left| 1 \right\rangle \left\{ \hbar\omega \right\}^{1/2}$$

$$\therefore \left| 1 \right\rangle = \frac{\hat{a}^+}{\sqrt{\hbar\omega}} \left| 0 \right\rangle \qquad (2.30)$$

$$، \quad \hat{a}^+ \left| 1 \right\rangle = \sqrt{2\hbar\omega} \; \left| 2 \right\rangle$$

$$\therefore \left| 2 \right\rangle = \frac{\hat{a}^+}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left| 1 \right\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^2}{\sqrt{2!}} \left| 0 \right\rangle \left\{ \frac{1}{\hbar\omega} \right\} \qquad (2.31)$$

وعموما :

$$\left| n \right\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}} \left| 0 \right\rangle \left\{ \frac{1}{\hbar\omega} \right\}^{n/2} \qquad (2.32)$$

وتوضح لنا معادلة (2.29) سبب تسمية العاملة $\hat{a}^+$ " عاملة بناء " بمعنى ان الكت $\left| n \right\rangle$ يمثل حالة " مضطربة " للمتذبذب التوافقى تحتوى على عدد n من كمّات الطاقة كل منها $\hbar\omega$ بجانب طاقة نقطة الصفر $\frac{1}{2}\hbar\omega$ ونتيجة تأثير $\hat{a}^+$ علـى هذا المتجه $\left| n \right\rangle$ يتولد كم طاقة $\hbar\omega$ زيادة عما هو موجود ($n\hbar\omega$) .

ولنفرض الآن أن المتذبذب التوافقى فى حالة كمية تقابل تواجد هذا الجسيم عند نقطة احداثى الموضع لها x وعلى ذلك تكون الدالة الموجية هى $\left\langle x \right| \left. n \right\rangle$ ــ راجع معادلة (1.5) . وبما ان الحالة الارضية $\left| 0 \right\rangle$ تتميز بالعلاقة :

$$\hat{a} \left| E_0 \right\rangle = \hat{a} \left| 0 \right\rangle = 0 \qquad (2.18')$$

فانه بضرب تلك المعادلة من جهة اليسار فى متجه البرا ($\left\langle x \right|$) :

$$\therefore \left\langle x \middle| a \middle| 0 \right\rangle = 0$$

$$\therefore \left\langle x \middle| \left\{ \sqrt{\frac{m}{2}}\,\omega x + i \frac{p}{\sqrt{2m}} \right\} \middle| 0 \right\rangle = 0$$

$$\therefore \left\{ \sqrt{\frac{m}{2}}\,\omega x + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \right\} \left\langle x \middle| 0 \right\rangle = 0$$

$$\therefore -\sqrt{\frac{m}{2}}\,\omega x\, dx = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d\left\langle x \middle| 0 \right\rangle}{\left\langle x \middle| 0 \right\rangle}$$

$$\therefore \left\langle x \middle| 0 \right\rangle = \text{constant } (C)\, e^{-\frac{m x^2 \omega}{2\hbar}} \tag{2.33}$$

ويمكننا الحصول على مايساويه الثابت C في معادلة (2.33) بأن نستفيد من العلاقة :

$$\left\langle 0 \middle| 0 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle x \middle| 0 \right\rangle dx = 1 \tag{2.34}$$

$$\therefore \quad C = \left[\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right]^{1/4} \tag{2.35}$$

وباستخدام العلاقة :

$$\left\langle x \middle| 1 \right\rangle = \left\langle x \middle| a^{+} \middle| 0 \right\rangle = \left\langle x \middle| \left\{ \sqrt{\frac{m}{2}}\,\omega x - i \frac{p}{\sqrt{2m}} \right\} \middle| 0 \right\rangle$$

$$= \left\{ \sqrt{\frac{m}{2}}\,\omega x - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \right\} \left\langle x \middle| 0 \right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{2m}{\hbar}}\, x \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m x^2 \omega}{2\hbar}} \tag{2.36}$$

وبنفس الاسلوب يمكننا استنتاج المعادلة العامة لأى دالة خاصة بالحالات الخطرة : (excited)

$$\left\langle x \middle| n \right\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{h}}\, x\right) e^{-\frac{m x^2 \omega}{2\hbar}} \qquad (2.37)$$

حيث $H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\right)$ متعددة الحدود لهيرميت Hermite Polynomial .

مثال (٢ ـ ١) :

فى مسألة المتذبذب التوافقى البسيط عبّر عن العاملة $\hat{x}$ والعاملة $\hat{p}$ بدلالة عاملتى خفض ورفع مستويات الطاقة للمتذبذب $\hat{a}$ و $\hat{a}^+$ $(\bar{\hat{a}} = \hat{a}^+)$ واحسب عناصر الصفوفة التى تقابل كل منهما . ووضح ماتكون عليه كل من هاتين الصفوفتين .

الحل :

نعلم أن :

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m}{2}}\, \omega \hat{x} + i \frac{\hat{p}}{\sqrt{2\, m}} \qquad (2.2)$$

$$\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m}{2}}\, \omega x - i \frac{p}{\sqrt{2\, m}} \qquad (2.3)$$

وأن :

$$a \left| n \right\rangle = \sqrt{n \hbar\omega} \left| n-1 \right\rangle \qquad (2.28)$$

$$a^+ \left| n \right\rangle = \sqrt{(n+1) \hbar\omega} \left| n+1 \right\rangle \qquad (2.29)$$

وعلى ذلك فان اى عنصر فى المصفوفة التى تمثل العاملة $\hat{a}$ تأخذ الصورة :

$$\langle m | \hat{a} | n \rangle = \langle m \left| \sqrt{n \hbar\omega} \right| n-1 \rangle$$

$$= \sqrt{n \hbar\omega} \; \langle m | n-1 \rangle$$

$$= \sqrt{n \hbar\omega} \; \delta_{m,n-1} \qquad (2.38)$$

وبالمثل فان اى عنصر فى المصفوفة التى تمثل العاملة $\hat{a}^+$ تأخذ الصورة :

$$\langle m | \hat{a}^+ | n \rangle = \sqrt{(n+1) \hbar\omega} \; \delta_{m,n+1} \qquad (2.39)$$

وحيث ان :

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2 m \omega^2}} (\hat{a}^+ + \hat{a}) \;, \quad \hat{p} = i \sqrt{\frac{m}{2}} (\hat{a}^+ - \hat{a})$$

اذاً عنصر المصفوفة التى تمثل العاملة $\hat{x}$:

$$\langle m | \hat{x} | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2 m \omega^2}} \left\{ \langle m|\hat{a}^+|n\rangle + \langle m|\hat{a}|n\rangle \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2 m}} \left\{ \sqrt{n+1} \; \delta_{m,n+1} + \sqrt{n} \; \delta_{m,n-1} \right\} \qquad (2.40)$$

وعنصر المصفوفة التى تمثل العاملة $\hat{p}$:

$$\langle m|\hat{p}|n\rangle = i \sqrt{\frac{m}{2}} \left[\langle m | \hat{a}^+ | n\rangle - \langle m|\hat{a}|n\rangle \right]$$

$$= i \sqrt{\frac{m \hbar\omega}{2}} \left\{ \sqrt{n+1} \; \delta_{m,n+1} + \sqrt{n} \; \delta_{m,n-1} \right\} \qquad (2.41)$$

وعلى ذلك فان مصفوفة $\hat{x}$ تاخذ الصورة :

$$\left\{ \hat{x} \right\} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

ومصفوفة $\hat{p}$:

$$\left\{ \hat{p} \right\} = i\sqrt{\frac{m\,\hbar\,\omega}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

بسم الله الرحمن الرحيم

الباب الثالث

معالجة كمية التحرك الزاوى بدلالة ديراك

فى هذا الباب نود دراسة خصائص تتميز بها عاملات كمية التحرك الزاوى لانستطيع استنتاجها إلا فى اطار دلالة ديراك .

نبدأ هنا ببعض العلاقات الخاصة بكمية التحرك الزاوى وتتلخص فيما يلى وسبق لنا ذكرها بشىء من التفصيل فى " الجزء الاول " . وهذه العلاقات هى (حيث $\hat{J}_x$ و $\hat{J}_y$ و $\hat{J}_z$ هى العاملات التى تمثل مركبات كمية التحرك الزاوى $\hat{J}$) :

$$\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] = i\hbar \hat{J}_z \tag{3.1}$$

$$\left[\hat{J}_y, \hat{J}_z\right] = i\hbar J_x \tag{3.2}$$

$$\left[\hat{J}_z, \hat{J}_x\right] = i\hbar J_y \tag{3.3}$$

$$\left[\hat{J}_x, \hat{J}^2\right] = 0 \tag{3.4}$$

$$\left[\hat{J}_z, \hat{H}\right] = 0 \tag{3.5}$$

$$\left[\hat{J}^2, \hat{H}\right] = 0 \tag{3.6}$$

وكون ان كلا من $\hat{J}_z$ و $\hat{J}^2$ تتبادل مع العاملة الهاميلتونية $\hat{H}$ (معادلتى (3.5) و (3.6)) فهذا يعنى امكانية الحصول على دوال ايجينية فى نفس الوقت تنتمى للقيم الايجينية لهما وتحقق العلاقتين التاليتين :

$$\hat{J}_z \left|\beta , m\right\rangle = \hbar m \left|\beta , m\right\rangle \qquad (3.7)$$

$$6 \quad \hat{J}^2 \left|\beta , m\right\rangle = \hbar^2\beta \left|\beta , m\right\rangle \qquad (3.8)$$

بمعنى ان العاملتين $\hat{J}_z$ (التى تقابل المركبة العينية لكمية التحرك الـــزاوى) ، $\hat{J}^2$ عندما أثرتا على متجه الكت $\langle m , \beta|$ نتجت الدالة الايجينية $\langle m , \beta|$ التى تتمى فى نفس الوقت لكل من القيمة الايجينوية $\beta \hbar^2$ لمربع كمية التحـــــرك الزاوى $\hat{J}^2$ والقيمة الايجينية $m \hbar$ للمركبة العينية J_z .

ومن المناسب هنا التعريف بعاملتين جديدتين $\hat{J}_+$ و $\hat{J}_-$ ســـوف تساعدانا فى الحصول على القيم الايجينية والدوال الايجينية لكل من كمية التحرك الـزاوى $\hat{J}$ ومركباتها الثلاث $\hat{J}_x$ و $\hat{J}_y$ و $\hat{J}_z$. حيث :

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i \hat{J}_y \qquad (3.9)$$

$$\hat{J}_- = \hat{J}_x - i \hat{J}_y \qquad (3.10)$$

والان نود ان نستنتج بعض العلاقات الخاصة بهاتين العاملتين وتتلخص فيما يلى :

$$\left[\hat{J}_z , \hat{J}_+ \right] = \hat{J}_z \hat{J}_+ - \hat{J}_+ \hat{J}_z$$

$$= \hat{J}_z (\hat{J}_x + i \hat{J}_y) - (\hat{J}_x + i \hat{J}_y) \hat{J}_z$$

$$= \hat{J}_z \hat{J}_x + i \hat{J}_z \hat{J}_y - \hat{J}_x \hat{J}_z - i \hat{J}_y \hat{J}_z$$

$$= (\hat{J}_z \hat{J}_x - \hat{J}_x \hat{J}_z) - i (\hat{J}_y \hat{J}_z - \hat{J}_z \hat{J}_y)$$

$$= \left[\hat{J}_z , \hat{J}_x \right] - i \left[\hat{J}_y , \hat{J}_z \right]$$

$$= i \hbar \hat{J}_y - i (i \hbar \hat{J}_x)$$

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_+] = i\hbar \hat{J}_y + \hbar \hat{J}_x$$

$$= \hbar (\hat{J}_x + i \hat{J}_y) = \hbar \hat{J}_+$$

$$\therefore \hat{J}_z \hat{J}_+ - \hat{J}_+ \hat{J}_z = \hbar \hat{J}_+$$

$$\therefore \hat{J}_z \hat{J}_+ = \hat{J}_+ \hat{J}_z + \hbar \hat{J}_+ \tag{3.11}$$

وبالمثـــل :

$$\hat{J}_z \hat{J}_- = \hat{J}_- \hat{J}_z - \hbar \hat{J}_- \tag{3.12}$$

فاذا ما أثرنا بالعاملة $(\hat{J}_z \hat{J}_+)$ على الدالة $|\beta, m\rangle$ نجد ان :

$$\hat{J}_z \hat{J}_+ |\beta, m\rangle = (\hat{J}_+ \hat{J}_z + \hbar \hat{J}_+) |\beta, m\rangle$$

$$= \hat{J}_+ \hat{J}_z |\beta, m\rangle + \hbar \hat{J}_+ |\beta, m\rangle$$

$$= \hat{J}_+ \hbar m |\beta, m\rangle + \hbar \hat{J}_+ |\beta, m\rangle$$

$$= \hbar m \hat{J}_+ |\beta, m\rangle + \hbar \hat{J}_+ |\beta, m\rangle$$

$$= (\hbar m + \hbar) \hat{J}_+ |\beta, m\rangle$$

$$= \hbar (m + 1) \hat{J}_+ |\beta, m\rangle$$

$$\therefore \hat{J}_z \left\{ \hat{J}_+ |\beta, m\rangle \right\} = \hbar (m + 1) \left\{ \hat{J}_+ |\beta, m\rangle \right\} \tag{3.13}$$

وبمقارنة هذه النتيجة بمعادلة (3.7) نلاحظ تعارض وهذا معناه ضرورة أن :

$$\hat{J}_+ |\beta, m\rangle = 0 \tag{3.14}$$

أو أن :

$$\hat{J}_+ \left| \beta , m \right\rangle = \left| \beta , m+1 \right\rangle \qquad (3.15)$$

وعلى هذا تصبح معادلة (3.13) بالصورة التالية :

$$\hat{J}_z \left| \beta , m+1 \right\rangle = \hbar (m+1) \left| \beta , m+1 \right\rangle \qquad (3.16)$$

دون أى تعارض من اى وجه • وعلى هذا يمكننا فهم معنى معادلة (3.15) على انه اذا بدأنا بدالة ايجينية $\langle m , \beta |$ خاصة بالقيم الايجينية $m \hbar$ للعاملة $\hat{J}_z$ ، $\beta \hbar^2$ للعاملة $\hat{J}^2$ وأثرنا بالعاملة $\hat{J}_+$ على هذه الدالة يمكننا توليد دالة ايجينية $\langle m+1 , \beta |$ تتبع للقيمة الايجينية $(m+1) \hbar$ للعاملة $\hat{J}_z$ • وهذه العملية يمكن ان تستمر على هذا النحو الى ان تصل m الى القيمة القصوى m_{max} التى لايمكن تعديها والتى تقابل حينئذ ماتعنيه معادلة (3.14) على النحو التالى :

$$\hat{J}_+ \left| \beta , m_{max} \right\rangle = 0 \qquad (3.14')$$

وعلى نفس النمط اذا سمحنا للعاملة $\hat{J}_z \hat{J}_-$ ان تؤثر على الدالة $\langle m , \beta |$ نجد أن :

$$\hat{J}_z \hat{J}_- \left| \beta , m \right\rangle = (\hat{J}_- \hat{J}_z - \hbar \hat{J}_-) \left| \beta , m \right\rangle$$

$$= \hbar (m-1) \hat{J}_- \left| \beta , m \right\rangle$$

أى أن :

$$\hat{J}_z \left\{ \hat{J}_- \left| \beta , m \right\rangle \right\} = \hbar (m-1) \left\{ \hat{J}_- \left| \beta , m \right\rangle \right\} \qquad (3.17)$$

ومرة اخرى نلاحظ تعارضا بين هذه النتيجة ومعادلة (3.7) • وهذا معناه ضرورة أن :

$$\hat{J}_- \left| \beta , m \right\rangle = 0 \qquad (3.18)$$

أو أن

$$\hat{J}_- \left| \beta , m \right\rangle = \left| \beta , m-1 \right\rangle \qquad (3.19)$$

وعلى ذلك تصبح معادلة (3.17) بالصورة التالية :

$$\hat{J}_z \left| \beta , m-1 \right\rangle = \hbar (m-1) \left| \beta , m-1 \right\rangle \qquad (3.20)$$

وبهذا يتلاشى اي تعارض من اى وجه ومثلما رأينا فيما يختص بمعادلة (3.16) يمكننا تفسير معادلة (3.19) على انه اذا بدأنا بدالة ايجينية $|\beta , m\rangle$ خاصة بالقيمة الايجينية $m\hbar$ للعاملة $\hat{J}_z$ ، $\beta\hbar^2$ للعاملة $\hat{J}^2$ وأثرنا بالعاملة $\hat{J}_-$ على هذه الدالة يمكننا توليد دالة أيجينية جديدة $|\beta , m-1\rangle$ تتبع نفس القيمة الايجينية $\beta\hbar^2$ للعاملة $\hat{J}^2$ بينما تتبع قيمة ايجينية اقل $(m-1)\hbar$ للعاملة $\hat{J}_z$ • وهذه العملية يمكن هى الاخرى ان تستمر الى أن تصل m الى اصغر قيمة لها m_{min} وحينئذ يتحقق الشرط الموضح بمعادلة (3.18) على النحو التالى :

$$\hat{J}_- \left| \beta , m_{min} \right\rangle = 0 \qquad (3.18')$$

مع ملاحظة ان معادلتى (3.18) و (3.20) توضح ان القيم المسموح بها للعدد m تختلف عن بعضها باعداد صحيحة فقط •

ولننتقل الان الى العاملة "$\hat{J}_-\hat{J}_+$" :

$$\begin{aligned}
\hat{J}_-\hat{J}_+ &= (\hat{J}_x - i\,\hat{J}_y)(\hat{J}_x + i\,\hat{J}_y) \\
&= \hat{J}_x^2 + i\,\hat{J}_x\hat{J}_y - i\,\hat{J}_y\hat{J}_x - i^2\,\hat{J}_y^2 \\
&= (\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2) + i\,(\hat{J}_x\hat{J}_y - \hat{J}_y\hat{J}_x) \\
&= (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2) + i\,(i\hbar\,\hat{J}_z)
\end{aligned}$$

$$\therefore \; \hat{J}_-\hat{J}_+ = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z \qquad (3.21)$$

وبالسماح لهذه العاملة بأن تؤثر على الدالة $\left|\beta , m_{max}\right\rangle$ نجد أن :

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ \left|\beta , m_{max}\right\rangle = (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z) \left|\beta , m_{max}\right\rangle$$

$$= (\beta \hbar^2 - m_{max}^2 \hbar^2 - \hbar^2 m_{max}) \left|\beta , m_{max}\right\rangle$$

$$= \hbar^2 (\beta - m_{max}^2 - m_{max}) \left|\beta , m_{max}\right\rangle$$

$$\therefore \quad 0 = \hbar^2 (\beta - m_{max}^2 - m_{max}) \left|\beta , m_{max}\right\rangle$$

$$\therefore \; \beta - m_{max} (m_{max} + 1) = 0 \qquad (3.22)$$

وبالمثل

$$\hat{J}_+\hat{J}_- = (\hat{J}_x + i \hat{J}_y)(\hat{J}_x - i \hat{J}_y)$$

$$= \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z \qquad (3.23)$$

وبالسماح لهذه العاملة بأن تؤثر على الدالة $\left|\beta , m_{min}\right\rangle$ نجد أن :

$$\hat{J}_+\hat{J}_- \left|\beta , m_{min}\right\rangle = (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z) \left|\beta , m_{min}\right\rangle$$

$$= (\beta \hbar^2 - m_{min}^2 \hbar^2 - m_{min} \hbar^2) \left|\beta , m_{min}\right\rangle$$

$$\therefore \quad 0 = \hbar^2 (\beta - m_{min}^2 + m_{min}) \left|\beta , m_{min}\right\rangle$$

$$\therefore \; \beta - m_{min} (m_{min} - 1) = 0 \qquad (3.24)$$

وعلى ذلك من معادلتي (3.22) و (3.24) نحصل على :

$$m_{max} (m_{max} + 1) = m_{min} (m_{min} - 1)$$

$$\therefore \quad m_{max}^2 + m_{max} - m_{min}^2 + m_{min} = 0$$

$$\therefore \quad (m_{max}^2 - m_{min}^2) + (m_{max} + m_{min}) = 0$$

$$\therefore \quad (m_{max} + m_{min}) \left[m_{max} - m_{min} + 1 \right] = 0$$

$$\therefore \quad m_{max} = - m_{min} \qquad (3.25)$$

وهذه المعادلة تعني اننا لو رمزنا لكل من $\left| m_{max} \right|$ و $\left| m_{min} \right|$ بالرمز المشترك j اى ان :

$$\left| m_{max} \right| = \left| m_{min} \right| = j \qquad (3.26)$$

فان القيم الممكنة للعدد الكمي m تتغير بخطوات عددية صحيحة ليس بها كسور من $-j$ الى $+j$ مع التماثل نحو " نقطة الأصل " . وبما ان قيم m_{max} و m_{min} تختلف عن بعضها باعداد صحيحة فان :

$$m_{max} - m_{min} = 2j \qquad (3.27)$$

$$\therefore \quad j = \frac{m_{max} - m_{min}}{2} \qquad (3.28)$$

ومن معادلة (3.28) نلاحظ أن :

$j = 0$ عندما تكون $m_{max} - m_{min} = 0$ ،

$j = \frac{1}{2}$ عندما تكون $m_{max} - m_{min} = 1$ ،

$j = 1$ عندما تكون $m_{max} - m_{min} = 2$ ،

$j = \frac{3}{2}$ عندما تكون $m_{max} - m_{min} = 3$ الخ

أى ان قيم j تكون على النحو التالى :

$$j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, 1\tfrac{1}{2}, 2, 2\tfrac{1}{2}, \ldots, \tag{3.29}$$

ونود ان نشير هنا الى ان هذه النتيجة الهامة الخاصة بالقيم الايجينية لعاملة كمية التحرك الزاوى $\hat{J}$ امكن التوصل اليها باستخدام علاقات التبادل للعاملة $\hat{J}$ ومركباتها $\hat{J}_x$ و $\hat{J}_y$ و $\hat{J}_z$ • ولم يكن من الممكن التوصل اليها باستخدام معادلة شرودنجر الآ فى اطار دلالة ديراك •

وبعدما درسنا كيفية الوصول الى تلك النتيجة الهامة فى ميكانيكا الكم ننتقل الى دراسة المصفوفات التى تمثل مركبات كمية التحرك الزاوى •

مصفوفات $\hat{J}$:

نلاحظ من معادلتى (3.24) و (3.26) ان :

$$\beta = j\,(j+1) \tag{3.30}$$

وعلى ذلك نستبدل معادلات (3.7) و (3.8) و(3.15) و (3.19) بالمعادلات التالية :

$$\hat{J}_z \, | j,m \rangle = \hbar \, m \, | j,m \rangle \tag{3.31}$$

$$\hat{J}^2 \, | j,m \rangle = \hbar^2 \, j \, (j+1) \, | j,m \rangle \tag{3.32}$$

$$\hat{J}_+ \, | \beta \, , m \rangle = | \beta \, , m+1 \rangle \tag{3.33}$$

$$\hat{J}_- \, | \beta \, , m \rangle = | \beta \, , m-1 \rangle \tag{3.34}$$

والان اذا ادخلنا معامل معايرة(Normalization Factor) وليكن N_+ في معادلة (3.33) والمقابل لهذا N_- في معادلة (3.34) مع التعويض مرة اخرى عن $\hat{J}_+$ ، $\hat{J}_-$ بدلالة المركبتين $\hat{J}_x$ و $\hat{J}_y$ نجد ان :

$$(\hat{J}_x + i \, \hat{J}_y) \, | j,m \rangle = N_+ \, | j, m+1 \rangle \tag{3.35}$$

$$(\hat{J}_x - i \, \hat{J}_y) \, | j, m+1 \rangle = N_- \, | j, m \rangle \tag{3.35'}$$

ويمكننا اختيار شرط مساواة المعاملين N_+ و N_- حيث لايوجد اى تعارض على أساس فيزيائي لمثل هذا الاختيار . وعلى ذلك نستطيع كتابة :

$$N_+ = N_- = N \tag{3.36}$$

(ومع ملاحظة ان هذه متصلة بمعامل الثقل الاحصائي(Weighting Factor) في عملية حساب كثافة الحالات الكمية فهذا يعني ان N يجب ان تكون حقيقية) . والان لنجعل العاملة $\hat{J}_-$(Lowering Operator) تؤثر على $(\hat{J}_x + i\hat{J}_y) \, | \, j,m \rangle$ في معادلة (3.35) فنجد ان :

$$(\hat{J}_x - i\hat{J}_y)(\hat{J}_x + i\hat{J}_y) \mid j, m\rangle = (\hat{J}_x - i\hat{J}_y)\, N \mid j, m+1\rangle$$

$$= N\,(\hat{J}_x - i\hat{J}_y) \mid j, m+1\rangle$$

$$= N.N \mid j, m\rangle = N^2 \mid j, m\rangle \qquad (3.37)$$

وباجراء الضرب القياسي لهذه المعادلة مع الدالة المرافقة (متجه البـــــــرا) $\langle j, m|$ نجد ان :

$$\langle j,m|\,(J_x - iJ_y)(\hat{J}_x + i\hat{J}_y)|j,m\rangle = \langle j,m|N^2|j,m\rangle = N^2 \qquad (3.38)$$

وحيث ان :

$$(\hat{J}_x - i\hat{J}_y)\,(\hat{J}_x + i\hat{J}_y) = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar\,\hat{J}_z \qquad (3.21)$$

$$\therefore\ N^2 = \langle j,m|\left\{ \hat{J}^2 \mid j,m\rangle - \hat{J}_z^2\,|j,m\rangle - \hbar\,\hat{J}_z\,|j,m\rangle \right\}$$

$$= \langle j,m|\,\left\{\hbar^2\, j(j+1)|j,m\rangle - \hbar^2 m^2|j,m\rangle - \hbar^2 m\,|j,m\rangle\right\}$$

$$= \langle j,m|\hbar^2\, j(j+1)|j,m\rangle - \langle j,m|\hbar^2 m^2|j,m\rangle - \langle j,m|\hbar^2 m|j,m\rangle$$

$$= \hbar^2\left\{j(j+1) - m^2 - m\right\}.\langle j,m|j,m\rangle = \hbar^2\left\{j(j+1)-m(m+1)\right\}.1$$

$$\therefore\ N = \pm\hbar\sqrt{j\,(j+1) - m\,(m+1)}$$

ومرة اخرى على اساس فيزيائي نستطيع ان نختار العلامة الموجبة :

$$N = \hbar\sqrt{j\,(j+1) - m\,(m+1)} \qquad (3.39)$$

وبادخال هذه النتيجة فى معادلة (3.35) نحصل على :

$$(\hat{J}_x + i\hat{J}_y)|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\;|j,m+1\rangle \qquad (3.40)$$

بينما معادلة (3.35') تعطينا :

$$(\hat{J}_x - i\hat{J}_y)|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - (m-1)m}\;|j,m-1\rangle \qquad (3.40')$$

حيث كتبنا m بدلاً من (m+1) ، (m-1) بدلاً من m .

وبجمع معادلتى (3.40) ، (3.40') :

$$\hat{J}_x|j,m\rangle = \frac{\hbar}{2}\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\;|j,m+1\rangle$$

$$+ \frac{\hbar}{2}\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\;|j,m-1\rangle \qquad (3.41)$$

وباجراء الضرب القياسى لمعادلة (3.41) مع متجه البرا $\langle j', m'|$
نحصل على المصفوفة التى تمثل العاملة $\hat{J}_x$:

$$\langle j'm'|\hat{J}_x|j,m\rangle = \frac{\hbar}{2}\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\;\delta_{j',j}\;\delta_{m',m+1}$$

$$+ \frac{\hbar}{2}\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\;\delta_{j',j}\;\delta_{m',m-1} \qquad (3.42)$$

وبالمثل اذا طرحنا (3.40') من (3.40) واجراء الضرب القياسى للمعادلة الناتجة مع متجه البرا $\langle j',m'|$ نحصل على المصفوفة التى تمثل العاملة $\hat{J}_y$:

$$\langle j',m'|\hat{J}_y|j,m\rangle = -\frac{i\hbar}{2}\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\;\delta_{j',j}\;\delta_{m',m+1}$$

$$+ \frac{i\hbar}{2}\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\;\delta_{j',j}\;\delta_{m',m-1} \qquad (3.43)$$

وللحصول على الصفوفة التى تمثل العاملة $\hat{J}_z$ نستخدم مباشرة معادلة (3.31) حيث يتم الضرب القياسى لها بمتجه البرا $\langle j',m'|$:

$$\langle j',m'|\, \hat{J}_z \,|j,z\rangle = \hbar\, m \quad \delta_{j',j}\ \delta_{m',m} \qquad (3.44)$$

وأخيرا للحصول على الصفوفة التى تمثل J^2 نستخدم معادلة (3.32) :

$$\langle j',m'|\, \hat{J}^2 \,|j,m\rangle = \hbar^2\, j(j+1) \quad \delta_{j',j}\ \delta_{m',m} \qquad (3.45)$$

وبذلك نكون قد درسنا كيفية الحصول على الصفوفات التى تمثل $\hat{J}^2$ والمركبـــات $\hat{J}_x$ و $\hat{J}_y$ و $\hat{J}_z$ •

ونود ان نشير هنا الى ان معادلتى (3.44) ، (3.45) توضحان ان كلا من الصفوفة التى تمثل $\hat{J}_z$ والصفوفة التى تمثل $\hat{J}^2$ عبارة عن صفوفة محوريـــة اذ ان عناصرها تكون مساوية للصفر الا اذا كان دلالات تلك العناصــــر m و m' متساوية • اما كل من الصفوفتين اللتين تمثلان $\hat{J}_x$ و $\hat{J}_y$ فعناصرها تساوى صفرا الا اذا كان دلالات العنصر m و m' تختلف فيما بينها بمقدار الوحدة •

مثـال (٣ـ١) :

استنتج تراكيب الصفوفات التى تمثل $\hat{J}_x$ و $\hat{J}_y$ و $\hat{J}_z$ فى حالة $\hat{J}$ تساوى 0 ، ½ ، 1 •

الحـــل :

بالنسبة لحالة $\hat{J}$ تساوى صفرا (مثل جسيم الفا (وهو نواه ذره الهيليوم)) فجميع الصفوفات كل منها يساوى صفرا •

أما فى حالة $\hat{J}$ يساوى ½ فان القيم الممكنة للعدد m هى ½ ± .
ومعنى ذلك ان الدوال القاعدية هى $\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ و $\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$
وبذلك تكون المصفوفات المبنيــة عليها تتصف بتركيب $(2 \times \frac{1}{2} + 1)$ كعدد صفــوف افقية ، $(2 \times \frac{1}{2} + 1)$ كعدد صفوف رأسية . ثم نبدأ بكتابة دلالات عناصرهــــا بواسطة العدد m بقيم ½ ثم ½- من اليسار لليمين ، كذلـــك ½ ثم ½- من الصف العلوى الى الذى اسفله كما يلى :

$$\begin{pmatrix} (\quad)_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} & (\quad)_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \\ (\quad)_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} & (\quad)_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

وقيم تلك العناصر يمكننا الحصول عليها كما يلى :

ـ العنصر $(\hat{J}_x)_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ معناه :

$$\left\langle \tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2} \middle| \hat{J}_x \middle| \tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2} \right\rangle = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1) - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1)}\ \delta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\ \delta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}+1}$$

$$+ \frac{\hbar}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1) - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1)}\ \delta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\ \delta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}-1} = 0 + 0 = 0$$

ـ العنصر $(\hat{J}_x)_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$ معناه :

$$\left\langle \tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2} \middle| \hat{J}_x \middle| \tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2} \right\rangle = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1) - (-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2}+1)}\ \delta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\ \delta_{\frac{1}{2},(-\frac{1}{2}+1)}$$

$$+ \frac{\hbar}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1) - (-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2}-1)}\ \delta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\ \delta_{\frac{1}{2},(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 \times 1 + 0 = \frac{\hbar}{2}$$

ـ العنصر $(J_x)_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ معناه :

$$\left\langle \tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\left|\hat{J}_x\right|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}+1)-(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}+1)}\ \delta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\ \delta_{-\frac{1}{2},(\frac{1}{2}+1)}$$

$$+\frac{\hbar}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}+1)-(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}-1)}\ \delta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\ \delta_{-\frac{1}{2},(\frac{1}{2}-1)}$$

$$= 0 + \frac{\hbar}{2} = \frac{\hbar}{2}$$

ـ العنصر $(J_x)_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$ مما درسناه واضح انه يساوى صفرا .

وعلى ذلك فالمصفوفة التى تقابل $\hat{J}_x$:

$$\therefore\ \left\{\hat{J}_x\right\} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

والان بالنسبة للمركبة $\hat{J}_y$ فان :

ـ العنصر $(J_y)_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ معناه :

$$\left\langle \tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\left|\hat{J}_y\right|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle = -\frac{i\hbar}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}+1)-(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}+1)}\ \delta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\ \delta_{\frac{1}{2},(\frac{1}{2}+1)}$$

$$+\frac{i\hbar}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}+1)-(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}-1)}\ \delta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\ \delta_{\frac{1}{2},(\frac{1}{2}-1)}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

وبنفس الاسلوب نجد ان $(\hat{J}_y)_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$ يساوى $-\frac{i\hbar}{2}$ ، $(\hat{J}_y)_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$
يساوى $\frac{i\hbar}{2}$ بينما $(\hat{J}_y)_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$ يساوى صفرا •

وعلى ذلك تكون الصفوفة $\hat{J}_y$ عبارة عن :

$$\left\{ \hat{J}_y \right\} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

وأخيرا فالصفوفة $\hat{J}_z$ هى :

$$\left\{ \hat{J}_z \right\} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

وأخيرا بالنسبة لحالة $\hat{J}$ تساوى الوحدة فاننا نبدأ بكتابة دلالات عناصرها (بنفس الاسلوب الذى اوضحناه) كما يلى بالنسبة لكل من المركبات $\hat{J}_x$ و $\hat{J}_y$ و $\hat{J}_z$ مع ملاحظة ان القيم الممكنة للعدد m هى $+1$ ، 0 ، -1 وعلى ذلك فالصفوفة نرمز لها كما يلى :

$$\begin{pmatrix} (\quad)_{1,1} & (\quad)_{1,0} & (\quad)_{1,-1} \\ (\quad)_{0,1} & (\quad)_{0,0} & (\quad)_{0,-1} \\ (\quad)_{-1,1} & (\quad)_{-1,0} & (\quad)_{-1,-1} \end{pmatrix}$$

وبنفس الاسلوب الذى اتبعناه مع $\hat{J}$ تساوى ½ نجد ان فى حالة $\hat{J}$ = الوحدة :

$$\hat{J}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{J}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{J}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

بسم الله الرحمن الرحيم

الباب الرابع

نظرية ديراك الخاصة بالمعالجة الكمية لجسيم الالكترون في اطار النظرية النسبية

(DIRAC RELATIVISTIC QUANTUM THEORY OF THE ELECTRON)

—

نود في هذا الباب تبسيط نظرية ديراك لجسيم الالكترون وتوضيح ان الحركة المغزلية الداخلية (Internal Spin) للالكترون (كمثال لباقي الجسيمات الاولية (Elementary Particles) هي نتيجة طبيعية للنظرية النسبية الخاصة التي قدمها اينشتين •

تبعا للنظرية النسبية الخاصة نعلم أن لأى جسيم كتلته الساكنة m وكمية تحركه الخطي p وطاقته الكلية E فان :

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \qquad (4.1)$$

فاذا كان هذا الجسيم عبارة عن الكترون متواجد في مجال كهروستاتيكي يجب ان نستبدل E بالكمية (E - V) حيث V طاقة الوضع الناتجة عن المجال الكهربي سوف نهمل اى تأثيرات كهرومغناطيسية نتيجة حركة جسيم الالكترون داخل المجال الكهربي) :

$$\therefore \ (E - V)^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \qquad (4.2)$$

$$\therefore \quad E = V \pm \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

$$= V \pm c\sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + m^2c^2} \qquad (4.3)$$

واذا استبدلنا الطاقة الكلية E بالعاملة الهاميلتونية $\hat{H}$ ومركبات كميـة الحركة الخطية $\hat{p}_x$ و $\hat{p}_y$ و $\hat{p}_z$ بما يقابلها من عامـلات $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ ، $-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$ ، $-i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$ فان معادلة (4.3) تأخذ الصورة :

$$\hat{H} = V \pm c\sqrt{-\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + m^2c^2}$$

حيث العلامة (+) تقابل طاقة الحركة الموجبة بينما العلامة (ـ) تقابل طاقـة الحركة السالبة ، افترض ديراك ان الحيز الحر اى الفراغ مشغول بالكامل بالحـالات الكمية ذات الطاقة السالبة ولايوجد به اى مستويات طاقة موجبة لشغلها وتتميز الالكترونات التى تشغل تلك المستويات ذات الطاقة السالبة بأنها لاتشارك فى المجال الكهربـى الخارجى فاذا اسقط فوتون ذو طاقة مناسبة بحيث يستطيع انتزاع احد هذه الالكترونات ذات الطاقة السالبة من هذا البحر الذى يشغل الحيز الحر ويقذف به الى خارجـه فان مكان هذا الالكترون يصبح سلوكه تماما مثل سلوك الكترون ذى شحنة موجبة وكتلته مساوية لكتلة الالكترون المعتاد وهذا السلوك يقال انه خاص بجسيم الالكترون المضـاد او البوزيترون (Antielectron or Positron) ـ وبهذا النمط المبسط امكـن لديراك تفسير ظاهرة الانتاج المزدوج للالكترون والبوزيترون (Pair Production ·

بالرجوع الى المعادلة (4.4) نلاحظ ان الهاميلتونيه لها تعقيدات عـدة تتمثل فيما يلى :

أ ـ من المستحيل الوصول الى تعبير رياضى يمثل تيار الاحتمال وكثافة الاحتمـال ($\psi^*\psi$) يحقق علاقة تتفق مع النظريه النسبية وفى نفس الوقت تحقق مبدأ حفظ الاحتمالية ·

ب ـ تمنعنا من التعرف على كيفية تغير دالة الحالة ψ بتغير الزمن وهـذا يتعارض مع المبادئ الاساسية لنظرية ميكانيكا الكم ·

معنى هذا ان المعادلة [illegible] لاتمثل اساسا كافيا لميكانيكا الكـم سواء [illegible] فى حالة [illegible] على الطاقة [illegible] ام [illegible] · وعلينا أن نبحث عن صـورة

سليمة للعاملة الهاميلتونية وذلك عن طريق استبدال الجزء الذى داخل الجذر التربيعى بمربع تام (Perfect Square) مثل :

$$(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2) + m^2c^2 = [\gamma_x p_x + \gamma_y p_y + \gamma_z p_z + \gamma_m mc]^2 \quad (4.5)$$

ونلاحظ ان هذه المعادلة تمثل جسيم حر (Free Particle) وعلى ذلك لايصح ان تحتوى العاملة الهاميلتونية الخاصة بها على حدود خاصة باحداثيات الحيز والزمن لان مثل هذه الحدود تتصف بطاقات تعتمد على الحيز والزمن اى ينتج عن ذلك صور ما من القوى ونحن مفترضين ان المعادلة تمثل جسيم حر •

كذلك فان مشتقات الحيز والزمن تظهر فقط فى كمية التحرك الخطى p والطاقة E وليس فى المعاملات γ's حتى نضمن ان المعادلة خطية فى كل هذه المشتقات • وعلى ذلك يتضح لنا ان المعاملات γ's يجب أن لاتعتمد على r و t و p و E اى انها تتبادل مع تلك المتغيرات جميعا • وعلى ضوء ذلك نوجد مفكوك الجانب الايمن من معادلة (4.5) ونتبع ذلك بالشروط الرياضية التى تحقق هذه الملامح الفيزيائية التى اسردناها :

$$\begin{aligned}
\left[\gamma_x p_x + \gamma_y p_y + \gamma_z p_z + \gamma_m mc\right]^2 &= \gamma_x^2 p_x^2 + \gamma_y^2 p_y^2 + \gamma_z^2 p_z^2 + \gamma_m^2 m^2c^2 \\
&+ (\gamma_x\gamma_y + \gamma_y\gamma_x)\, p_x p_y \\
&+ (\gamma_x\gamma_z + \gamma_z\gamma_x)\, p_x p_z \\
&+ (\gamma_x\gamma_m + \gamma_m\gamma_x)\, p_x\, mc \\
&+ (\gamma_y\gamma_z + \gamma_z\gamma_y)\, p_y p_z \\
&+ (\gamma_y\gamma_m + \gamma_m\gamma_y)\, p_y\, mc \\
&+ (\gamma_z\gamma_m + \gamma_m\gamma_z)\, p_z\, mc
\end{aligned} \quad (4.6)$$

ولكى يتساوى هذا المفكوك مع الطرف الايسر لمعادلة (4.5) يجب ان تكـــون الشروط التالية محققة :

$$\gamma_x^2 = \gamma_y^2 = \gamma_z^2 = \gamma_m^2 = 1 \qquad (4.7)$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_x \gamma_y + \gamma_y \gamma_x &= 0 \\ \gamma_x \gamma_z + \gamma_z \gamma_x &= 0 \\ \gamma_x \gamma_m + \gamma_m \gamma_x &= 0 \\ \gamma_y \gamma_z + \gamma_z \gamma_y &= 0 \\ \gamma_y \gamma_m + \gamma_m \gamma_y &= 0 \\ \gamma_z \gamma_m + \gamma_m \gamma_z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

ويقال حينئذ ان المعاملات γ's تتبادل بالتضاد (Anticommute) كـــل منها مع الاخر · وفى الحقيقة معادلات (4.7) و (4.8) يمكن جمعها فـــى معادلة واحدة كالتالى :

$$\gamma_k \gamma_\ell + \gamma_\ell \gamma_k = 2 \delta_{k\ell} \qquad (4.9)$$

وعندما تطيع المعاملات γ's معادلات (4.7) و (4.8) و (4.9) فان هذا يعنى :

$$\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2c^2} = \gamma_x p_x + \gamma_y p_y + \gamma_z p_z + \gamma_m mc$$

وتأخذ العاملة الهاميلتونية في معادلة (4.4) الشكل التالى :

$$\hat{H} = V - c\,(\gamma_x p_x + \gamma_y p_y + \gamma_z p_z + \gamma_m mc) \qquad (4.10)$$

وبما ان العاملات γ's تتبادل بالتضاد كل منها مع الاخر فمعنى ذلك انها ليست اعداد عادية وفي الحقيقة يجب ان تكون عاملات خطية وعلى ذلك يمكن تمثيلها على النحو الموضح (وتسمى عاملات ديراك (Dirac Operators)) :

$$\gamma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(4.11)$$

$$\gamma_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ونلاحظ انها مصفوفات (4 x 4) ـ وهى اصغر مصفوفة تحقق العلاقة (4.9) ـ ونتيجة لذلك فان دوال ديراك ψ التى ستؤثر عليها تلك المصفوفات يجب ان تكون لها اربع مركبات على النحو التالى :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \qquad (4.12)$$

وعلى ذلك تكون المعادلة الموجية الايجينية $(\hat{H}\psi = E\psi)$ بالصورة :

$$(V - c\,\gamma_x p_x - c\,\gamma_y p_y - c\,\gamma_z p_z - \gamma_m mc^2)\psi = E\psi \qquad (4.13)$$

وهى معادلة ديراك الموجية • وبالتعويض عن المعاملات γ's تأخذ الشكل التالى بدلالة الصفوفات مع ملاحظة ان طاقة الوضع V بما انها كمية فيزيائية يمكن تعيينها فى المعمل إذاً نعوض عنها كصفوفة محورية (4×4) :

$$\left[\begin{pmatrix} V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & cp_x \\ 0 & 0 & cp_x & 0 \\ 0 & cp_x & 0 & 0 \\ cp_x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -icp_y \\ 0 & 0 & icp_y & 0 \\ 0 & -icp_y & 0 & 0 \\ icp_y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} 0 & 0 & cp_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -cp_z \\ cp_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -cp_z & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} mc^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & mc^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mc^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -mc^2 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V - mc^2 & 0 & -cp_z & -c(p_x-ip_y) \\ 0 & V - mc^2 & -c(p_x+ip_y) & cp_z \\ -cp_z & -c(p_x-ip_y) & V + mc^2 & 0 \\ -c(p_x+ip_y) & cp_z & 0 & V + mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} (V-mc^2)\Psi_1 - cp_z\Psi_3 - c(p_x-ip_y)\Psi_4 \\ (V-mc^2)\Psi_2 - c(p_x+ip_y)\Psi_3 + cp_z\Psi_4 \\ -cp_z\Psi_1 - c(p_x-ip_y)\Psi_2 + (V+mc^2)\Psi_3 \\ -c(p_x+ip_y)\Psi_1 + cp_z\Psi_2 + (V+mc^2)\Psi_4 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} (V - mc^2)\Psi_1 - cp_z\Psi_3 - c(p_x - ip_y)\Psi_4 &= E\Psi_1 \\ (V - mc^2)\Psi_2 - c(p_x + ip_y)\Psi_3 + cp_z\Psi_4 &= E\Psi_2 \\ -cp_z\Psi_1 - c(p_x - ip_y)\Psi_2 + (V + mc^2)\Psi_3 &= E\Psi_3 \\ -c(p_x + ip_y)\Psi_1 + cp_z\Psi_2 + (V + mc^2)\Psi_4 &= E\Psi_4 \end{aligned} \tag{4.15}$$

وأخيرا باستبدال p_x بالعاملة $(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x})$ ...الخ نحصل على :

$$\frac{i}{\hbar}\left(\frac{E-V}{c}+mc\right)\psi_1+\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_4+\frac{\partial}{\partial z}\psi_3=0$$

$$\frac{i}{\hbar}\left(\frac{E-V}{c}+mc\right)\psi_2+\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_3-\frac{\partial}{\partial z}\psi_4=0$$

$$\frac{i}{\hbar}\left(\frac{E-V}{c}-mc\right)\psi_3+\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_2+\frac{\partial}{\partial z}\psi_1=0$$

$$\frac{i}{\hbar}\left(\frac{E-V}{c}-mc\right)\psi_4+\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_1-\frac{\partial}{\partial z}\psi_2=0$$

(4.16)

ومن هذا يتضح لنا ان المعادلة المفردة التى وضعها ديراك (معادلة (4.13)) هى فى الحقيقة تقابل اربع معادلات تفاضلية جزئية محددة (4.16). ولتحديد مستويات الطاقة الخاصة بالالكترون الذى يسبح فى مجال كهروستاتيكى حيث يتميز الالكترون بطاقة وضع $V(x, y, z) = V$ علينا ان نحسب القيم العددية للطاقة E التى تحقق ان معادلات (4.16) لها حلول حسنة السلوك بمعنى ان احدى الدوال ψ_1 و ψ_2 و ψ_3 و ψ_4 على الاقل تختلف عن الصفر وكذلك حسنه السلوك بمفهوم نظرية شرودنجر . ولقد وضّح ديراك ان مثل هذه الحسابات تسهل بعض الشئ بوضع المصفوفات γ's بالصورة التالية :

$$\gamma_x=\rho_1\sigma_x \quad , \quad \gamma_y=\rho_1\sigma_y \quad , \quad \gamma_z=\rho_1\sigma_z$$

حيث

$$\rho_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_x=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&x_{14}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&x_{24}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&x_{34}\\x_{41}&x_{42}&x_{43}&x_{44}\end{pmatrix}$$

وعليه حيث ان : $\gamma_x = \rho_1 \; \sigma_x$

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

$$\therefore \; x_{12} = x_{21} = x_{34} = x_{43} = 1$$

وبقية العناصر فى الطرف الأيمن من معادلة (4.17) يساوى صفرا

$$\therefore \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

وبالمثل نحصل على المصفوفتين σ_y و σ_z كما يلى :

$$\because \; \gamma_y = \rho_1 \, \sigma_y$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \\ y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad y_{34} = -i \ , \quad y_{43} = i \ , \quad y_{12} = -i \ , \quad y_{21} = i$$

$$\therefore \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.19)$$

$$6 \because \quad \gamma_z = \rho_1 \sigma_z$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \; z_{33} = 1, \; z_{44} = -1, \; z_{11} = 1, \; z_{22} = -1$$

$$\therefore \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

والان نلاحظ ان العاملة الهاميلتونية فى معادلة (4.10) يمكن كتابتها كما يلى :

$$\hat{H} = \hat{V} - \rho_1 \left(\gamma_x \hat{p}_x + \gamma_y \hat{p}_y + \gamma_z \hat{p}_z \right) - \gamma_m \, mc^2 \tag{4.21}$$

وعلينا ان نبحث عن طبيعة ثوابت الحركة المرتبطه بهذه الهاميلتونية فى صورتها (4.21) التى اوضحها ديراك .

ولعمل ذلك علينا فى هذه الخطوة ان نراجع بعض الاساسيات لميكانيكا الكم المرتبط بهذا الاطار :

تبعا لما اوضحه هايزنبرج فان معادلة الحركة الخاصة بأى متغير ديناميكى $\hat{F}$ تكتب اساسا على النحو التالى :

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{F}, \hat{H} \right] \tag{4.22}$$

حيث الجانب الايسر من معادلة (4.22) عبارة عن الصفوفة التى عناصرها تمثل مايعرف بالمشتقة التفاضلية الكلية بالنسبة للزمن للصفوفة التى تمثل المتغير الديناميكى $\hat{F}$. بينما فى الجانب الايمن يمثل الحد الاول صفوفة التفاضل الجزئى

للمتغير $\hat{F}$ بالنسبة للزمن حيث يؤخذ فى الاعتبار كيفية اعتمادها على احداثـــى الزمن بالضبط • اما الجزء الاخر من الجانب الايمن فيمثل جزء المشتقة التفاضليــــة للمتغير $\hat{F}$ الذى ينتج عن التغير الزمنى للدوال الموجية التى يتم حساب المصفوفة بالنسبة لها •

ولنحسب مفكوك قوس التبادل للمركبة السينية لعاملة ديراك التى تمثل كمية التحرك الخطى (وسوف نستخدم لذلك الرمز L_x) :

$$\left[\hat{L}_x, \hat{H}\right] = \hat{L}_x\hat{H} - \hat{H}\hat{L}_x$$

$$= \hat{L}_x \left\{\hat{V} - c\rho_1 (\sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z) - \gamma_m mc^2\right\}$$

$$- \left\{\hat{V} - c\rho_1 (\sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z) - \gamma_m mc^2\right\} L_x \qquad (4.23)$$

وبما ان المركبة L_x تتبادل مع كل من $\hat{V}$ و $\hat{p}_x$ و γ_m :

$$\therefore \left[\hat{L}_x, \hat{H}\right] = L_x \left\{-c\rho_1 (\sigma_y p_y + \sigma_z p_z)\right\}$$

$$- \left\{c\rho_1 (\sigma_y p_y + \sigma_z p_z)\right\} L_x$$

$$= -c\rho_1 L_x \sigma_y \sigma_y - c\rho_1 L_x \sigma_z p_z + c\rho_1 \sigma_y p_y L_x$$

$$= -c\rho_1 \sigma_y (L_x p_y - p_y L_x) - c\rho_1 \sigma_z (L_x p_z - p_z L_x)$$

$$= -c\rho_1 \left\{\sigma_y (i\hbar p_z) - \sigma_z (-i\hbar p_y)\right\}$$

$$= -i h c\rho_1 \left[\sigma_y p_z - \sigma_z p_y\right] \neq \text{Zero} \qquad (4.24)$$

اى ان المركبة L_x فى اطار نظرية ديراك لاتتبادل مع العاملة الهاملتونية أى انهـــا ليست ثابت للحركة (بعكس الوضع فى الميكانيكا الكلاسيكية حيث L_x ثابت للحركـــة) لالكترون يتحرك فى مجال كهروستاتيكى مركزى (مثل ماهو موجود فى اى ذرة مـــــن ذرات المادة) .

والان بالنسبة للمركبة σ_x والتى تتبادل مع كل كمية فيزيائية موجودة فـــــى معادلة (4.23) ماعدا σ_y و σ_z فهذا معناه :

$$\left[\hat{\sigma}_x, \hat{H}\right] = \sigma_x\left\{V - c\rho_1\,(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z) - \gamma_m\, mc^2\right.$$

$$\left. - \left\{V - c\rho_1\,(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y \div \sigma_z p_z) - \gamma_m\, mc^2\right\}\sigma_x\right.$$

$$= \sigma_x\left\{-c\rho_1\,(\sigma_y p_y + \sigma_z p_z)\right\} - \left\{-c\rho_1(\sigma_y p_y \div \sigma_z p_z)\right\}\sigma_x$$

$$= -\,c\rho_1\,(\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x)\,p_y + c\rho_1(\sigma_z\sigma_x - \sigma_x\sigma_z)\,p_z$$

ولكننا نعلم ان :

$$\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

أى أن :

$$\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$= 2\,i \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2\,i\sigma_z \qquad (4.25)$$

$$\therefore \quad \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 2\,i\sigma_z \qquad (4.25)$$

وبالمثل :

$$\sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_y = 2\,i\sigma_x$$

$$\sigma_z\sigma_x - \sigma_x\sigma_z = 2\,i\sigma_y$$

$$\therefore \left[\hat{\sigma}_x, \hat{H}\right] = \sigma_x H - H\sigma_x = -\,c\,\rho_1\,(2\,i\,\sigma_z)\,p_y + c\,\rho_1(2\,i\,\sigma_y)p_x$$

$$= 2\,i\,c\,\rho_1\,(\sigma_y\,p_z - \sigma_z\,p_y) \qquad (4.27)$$

ولقد رأينا أن :

$$\hat{L}_x\hat{H} - \hat{H}\hat{L}_x = -i\hbar c\rho_1 \cdot (\hat{\sigma}_y\hat{p}_z - \hat{\sigma}_z\hat{p}_y)$$

$$= -i\hbar c\rho_1 \cdot \frac{\hat{\sigma}_x \hat{H} - \hat{H}\hat{\sigma}_x}{2ic\rho_1}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\hbar(\hat{\sigma}_x\hat{H} - \hat{H}\hat{\sigma}_x)$$

$$\therefore\ (\hat{L}_x\hat{H} + \tfrac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_x\hat{H}) - (\hat{H}\hat{L}_x + \tfrac{1}{2}\hbar\hat{H}\hat{\sigma}_x) = 0$$

$$\therefore\ (\hat{L}_x + \tfrac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_x)\hat{H} - \hat{H}(\hat{L}_x + \tfrac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_x) = 0 \qquad (4.28)$$

اى ان المتغير الديناميكى " $(\hat{L}_x + \tfrac{1}{2}\hbar\ \sigma_x)$ " هو احد ثوابت الحركة فى مجال مركزى • ونلاحظ ان الكمية $(\tfrac{1}{2}\hbar\ \hat{\sigma}_x)$ التى يجب اضافتها الى $\hat{L}_x$ قبل ان نحصل على ثابت الحركة $(\hat{L}_x + \tfrac{1}{2}\hbar\ \sigma_x)$ اصلها هو فى اساسيات النظرية النسبية التى ادت الى استخدام هاميلتونية ديراك (معادلة (4.10)) بدلا من هاميلتونية شرودنجر • اى ان " $(\tfrac{1}{2}\hbar\ \sigma_x)$ " تُمثل احد تأثيرات النظرية النسبية • وتعرف هذه بالمركبة السينية للحركة المغزلية للالكترون (مع أن موضوع الحركة الدورانية لم يذكر بالمرة فى نظرية ديراك) •

هذا الاكتشاف الهام للحركة المغزلية لجسيم الالكترون ومن ثم لبقية الجسيمات الاولية على التتابع. على سبيل المثال من الناحية المعملية أدت التجارب الى اكتشاف الحركة المغزلية للالكترون عام ١٩٢٤ بينما للبروتون عام ١٩٢٨ والنيوترون عام ١٩٤٢ والفوتون عام ١٩٢٤ والميزون باى عام ١٩٤٧ والنيوترينو عام ١٩٧٢) ادت الى عدة ظواهر فيزيائية هامة مثل :

١ ـ ادى اكتشاف الحركة المغزلية للالكترون الى الفهم الصحيح لترتيب الالكترونات في ذراتها وتفاعلات الذرات مع بعضها والصفات الفيزيائية والكيميائية للمواد ولقد تم هذا الاكتشاف عن طريق تجارب زيمان Zeeman .

٢ ـ ادى اكتشاف الحركة المغزلية للبروتون والنيوترون ـ عن طريق تجارب رابي Rabi والفاريز Alvarez ـ الى اعتبارها ذين الجُسَيمين على ان كل منهما عبارة عن حالة كمية مختلفة لجسيم واحد وهو النيوكليون وبالتالي فهم وتبسيط العديد من الظواهر النووية .

٣ ـ ادى اكتشاف الحركة المغزلية للميزونات الى زيادة مدى فهم العلميين للعديد من ظواهر التفاعلات النووية والاشعة الكونية .

٤ ـ ادى اكتشاف ان الحركة المغزلية تتصف بعدد كم إما ان يكون عدد صحيح من $\hbar$ الى التعرف على مجموعة الجسيمات الاولية المعروفة بالبوزونات والتي يحكم تصرفاتها قوانين الاحصاء الكمية المسماه باحصاء (بوز ـ اينشتين) بينما الحركة المغزلية التي تقابل عدد كم نصف عدد صحيح تعرف باسم الفيرميونات ويتحكم في تصرفاتها قوانين احصاء (فيرمي ـ ديراك) وكذلك مبدأ اللاتحديد لهايزنبرج .

ملحوظة : الامثلة المحلولة المرتبطة بهذا الباب أضيفت الى الامثلة المحلولة في الباب الخامس .

بسم الله الرحمن الرحيم

الباب الخامس

مُزاوجة (أو تَقارُن) كميات الحركة الزاويــــة
(Coupling of Angular Moments)

يقصد بمزاوجة كميات الحركة الزاوية التراكب الاتجاهى لاثنين أو اكثر من متجــه كمية الحركة الزاوية • وهذه المزاوجة تتضح لنا لتفسير كثير من الظواهر الخاصـــــة بالتفاعلات الذرية والتفاعلات النووية وتفاعلات الجسيمات الأولية • فعلى سبيـــــل المثـال :

- مزاوجة متجه كمية الحركة الزاوية المرتبطه بالحركة المداريـــــة (Orbital Motion) لجسيم أولى مع كمية الحركة الزاوية المرتبطة بالحركة المغزليـــــة الذاتية لنفس الجسيم (Spinning Motion) • هذا يقابل مايحدث فى حالـة حركة الالكترونات فى " مداراتها " الذرية والحركة المغزلية الذاتية لكل منهـا • وكذلك مايحدث فى حالة حركة النيوكليونات (البروتونـات والنيوترونـــــات) فى " مداراتها " داخل نواه الذرة والحركة المغزلية الذاتية لكل منها •
- مزاوجه متجه كمية الحركة الزاوية المرتبطة بالحركة المدارية لجسيم اولى مع كميـــة الحركة الزاوية المرتبطة بالحركة المدارية لجسيم اولى آخر • هذا يقابـــــل مايحدث أثناء استطارة الاشعاعات النووية واستطارة الجسيمات الاولية بواسطـــة أهداف نووية •
- مزاوجة كمية الحركة الزاوية المرتبطة بالحركة المغزلية الذاتية لجسيم مع مثيلتهـــا لجسيم آخر ومن امثلة ذلك تفسير بعض خصائص الميزونات والهيبرونات الرنينيـــة

(Resonance Mesons and Hyperons) وجسيمات الكُـــــوارك (Quarks) .

— مزاوجة متجه كمية الحركة الزاوية النظيرية (Istopic Spin Angular Momentum) لجسيم مع متجه كمية الحركة الزاوية النظيرية لجسيم آخـــر .
ومن أبسط الامثلة على ذلك شرح الخصائص العامة لأنوية الذرات وشـــرح نتائج المشاهدات التجريبية الخاصة باستطارة الاشعاعات النووية .

ولنبدأ الآن بدراسة بعض اساسيات هذه المزاوجه في ابسط صورها ولذلـــك سوف نكتفي بمزاوجه اثنين فقط من متجهات كمية الحركة الزاوية ولنرمز لهما بالرمزيـــن $\hat{J}_1$ و $\hat{J}_2$ ولنرمز للمتجه الناتج من هذا التقارن بالرمز $\hat{J}$.

وجد أن $\hat{J}$ يتميز بنفس الخصائص التي يتميز بها اى عاملة كمية حركة زاويـــة بمعنى أن :

$$\hat{J} \times \hat{J} = (\hat{J}_1 + \hat{J}_2) \times (\hat{J}_1 + \hat{J}_2)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ J_x & J_y & J_z \\ J_x & J_y & J_z \end{vmatrix} = i\,(J_yJ_z - J_zJ_y) + j\,(J_zJ_x - J_xJ_z) + k\,(J_xJ_y - J_yJ_x)$$

أى ان المركبة السينية $J_x = (J_yJ_z - J_zJ_y)$ عبارة عن :

$$(J \times J)_x = J_{1y}J_{1z} + J_{1y}J_{2z} + J_{2y}J_{1z} + J_{2y}J_{2z}$$

$$- J_{1z}J_{1y} - J_{1z}J_{2y} - J_{2z}J_{1y} - J_{2z}J_{2y}$$

وبما أن J_1 و J_2 تتبادلان مع بعضهما فمعنى هذا أن
$J_{1y}J_{2z} = J_{2z}J_{1y}$ و ٠٠ والخ ٠ وعلى ذلك :

$$(J \times J)_x = (J_{1y}J_{1z} - J_{1z}J_{1y}) + (J_{2y}J_{2z} - J_{2z}J_{2y})$$
$$= i\hbar J_{1x} + i\hbar J_{2x} = i\hbar (J_{1x} + J_{2x}) = i\hbar J_x$$

أى أن

$$(J \times J)_x = i\hbar J_x$$

وعلى ضوء ما درسناه فى الباب الثالث لنفرض أن :
$|j_1 m_1\rangle = \psi_1 (j_1 m_1)$: هى الدالة الايجينية التى تنتمى للقيمة الايجينية $j_1(j_1 + 1)\hbar^2$ للعاملة J_1^2 وفى نفس الوقت تنتمى للقيمة الايجينية $m_1\hbar$ للمركبة العينية J_{1z} (ونود ان نشير هنا ان العاملة J_2 ليس لها أى تأثير على تلك الدوال $|j_1 \ m_1\rangle$

وبالمثل $|j_2 m_2\rangle = \psi_2 (j_2 m_2)$ هى الدالة الايجينية التى تنتمى للقيمتين الايجينيتين $j_2(j_2 + 1)\hbar^2$ و $m\hbar$ للعاملتين J_2^2 و J_{2z} فى نفس الوقت ٠ وهنا ايضا J_1 ليس لها اى تأثير على تلك الدوال ٠ وعلى ذلك نستطيع التعبير عن هذا بالعلاقات الاربعة التالية :

$$J_1^2 \psi_1 (j_1 m_1) = j_1 (j_1 + 1) \hbar^2 \psi_1 (j_1 m_1) \qquad (5.1)$$

$$J_{1z} \psi_1 (j_1 m_1) = m_1 \hbar \psi_1 (j_1 m_1) \qquad (5.2)$$

$$J_2^2 \psi_2 (j_2 m_2) = j_2 (j_2 + 1) \hbar^2 \psi_2 (j_2 m_2) \qquad (5.3)$$

$$J_{2z} \psi_2 (j_2 m_2) = m_2 \hbar \psi_2 (j_2 m_2) \qquad (5.4)$$

وكما درسنا فى الباب الثالث حيث ان كل قيمة ايجينية $j_1 (j_1 + 1) \hbar^2$ يقابلها $(2 j_1 + 1)$ قيم ممكنة للعدد الكمى m_1 وكذلك كل قيمة ايجينية $j_2 (j_2 + 1) \hbar^2$ يقابلها $(2 j_2 + 1)$ قيم ممكنة للعدد الكمى m_2
إذاً هناك عدد $(2 j_2 + 1)(2 j_1 + 1)$ من الدوال :

$$\psi (j_1 j_2 m_1 m_2) = \psi_1 (j_1 m_1) \psi_2 (j_2 m_2) \qquad (5.5)$$

وهذه تكون مجموعة كاملة من المتجهات الخاصة للعاملات $\hat{J}_1^2$ و $\hat{J}_{1z}$ و $\hat{J}_2^2$ و $\hat{J}_{2z}$ فى نفس الوقت • ومعادلة (5.5) تُعبر عن الدالة الايجينية التى تنتمى فى نفس الوقت للقيم الايجينية $j_1 (j_1 + 1) \hbar^2$ و $m_1 \hbar$ و $j_2 (j_2 + 1) \hbar^2$ و $m_2 \hbar_2$ • من ناحية اخرى حيث ان :

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + 2 \hat{J}_1 \hat{J}_2 \qquad (5.6)$$

ويتبادل J_1^2 و J_2^2 و J^2 و J_z كل منها مع الاخر • فان معنى ذلك استطاعتنا التعبير عن نفس المجموعة الفيزيائية التى نتناولها هنا بالدراسة بدلالة المتجه الايجينى $\Phi (j_1 j_2 j\ m)$ الذى ينتمى للقيم الايجينية $m \hbar$ و $j(j + 1) \hbar^2$ و $j_2(j_2 + 1) \hbar^2$ و $j_1(j_1 + 1) \hbar^2$ •

ونود الآن ايجاد تحويل توحيدى (Unitary Transformation) الذى يُمكّننا من التعبير عن الدوال Φ بدلالة الدوال ψ او العكس (وهذا يقابل دوران المحاور الاحداثية فى الحيز المتواجد فيه تلك الدوال " ويعرف بحيز هيلبرت Hilbert Space) :

فى البداية نلاحظ مايلى :

$$J_z \psi(j_1 j_2 m_1 m_2) = (J_{1z} + J_{2z}) \psi_1 (j_1 m_1) \psi_2 (j_2 m_2)$$

$$= J_{1z} \psi_1(j_1 m_1) \psi_2(j_2 m_2) + J_{2z} \psi_1(j_1 m_1) \psi_2(j_2 m_2)$$

$$= (m_1 + m_2) \hbar \psi_1 (j_1 m_1) \psi_2 (j_2 m_2)$$

$$= (m_1 + m_2) \hbar \psi (j_1 j_2 m_1 m_2) \qquad (5.7)$$

أى ان الدالة $\psi(j_1 j_2 m_1 m_2)$ هى دالة ايجينية تنتمى للقيمة الايجينية $(m_1 + m_2)\hbar$ للعاملة $\hat{J}_z$.

وبما ان $|m_1| \leqslant j_1$ ، $|m_2| \leqslant j_2$

$$\therefore \quad |m_1 + m_2| \leqslant (j_1 + j_2) \qquad (5.8)$$

فاذا فرض واعطينا قيم j_2 و j_1 نود ان نوجد القيم التى يمكن ان تتخذها j (على سبيل المثال اذا كان $j_1 = 1\ \hbar$ و $j_2 = ½\ \hbar$ معنى ذلك ان m_1 تأخذ القيم " $-1\ \hbar$ و 0 و $+1\ \hbar$ " بينما m_2 تأخذ القيمتين " $-½\ \hbar$ و $+½\ \hbar$ " وعلى ذلك تكون القيم الممكنة للمجموع $m_1 + m_2$ عددها ستة).

بما ان اكبر قيمة للعدد m_1 هو j_1 واكبر قيمة للعدد m_2 هو j_2 فهذا معناه ان اكبر قيمة للعدد j هو :

$$j_{max} = (m_1)_{max} + (m_2)_{max} = j_1 + j_2 \qquad (5.9)$$

معنى ذلك ان هناك حالة كمية مفردة يمثلها المتجه الايجينى $\Phi(j_1\ j_2\ j\ \ m)$ حيث :

$$\Phi(j_1\ j_2\ j\ m) = \Phi(j_1 j_2 \quad j_1+j_2 \quad j_1+j_2)$$

$$= \psi(j_1\ m_1\ j_2\ m_2)$$

$$= \psi(j_1\ j_1\ j_2\ j_2)$$

$$= \psi_1\ (j_1 j_1)\ \psi_2\ (j_2 j_2) \qquad (5.10)$$

هذا عندما تكون m لها اكبر قيمة ممكنة لها وهـــــى $m = j_1 + j_2$ تبعا للمعادلة (5.9) •

بعد ذلك عندما تأخذ m القيمة التى تلى تلك القيمـــة $(j_1 + j_2)$ أى $(j_1 + j_2 - 1)$ يكون هناك حالتان كميتان مختلفتان تُمثّلان بالمتجهين :

$$\Phi\ (j_1 j_2 \quad j_1+j_2 \quad j_1+j_2-1)$$

$$\text{،} \quad \Phi\ (j_1 j_2 \quad j_1+j_2-1 \quad j_1+j_2-1)$$

وسبب ذلك ان عدد الكم m يأخذ القيمة " $j_1 + j_2 - 1$ " عندمـــــا تكون " $j = j_1 + j_2$ " او عندما تكون " $j = j_1 + j_2 - 1$ " وأحدهمـــا تقابل الحالة (" $m_1 = j-1$ " و " $m_2 = j_2$ ") بينما الاخرى تقابـــــل الحالة (" $m_1 = j_1$ " و " $m_2 = j_2-1$ ") ـ بديهى ان هذا لاينطبـــق فى حالة j_1 او j_2 يساوى اى منهما صفرا ـ هاتان الحالتان يمكـــن اعتبارهما نتيجة الجمع الخطى للمتجهين :

$$\psi\ (j_1 j_2 \quad j_1 \quad j_2-1) \quad , \quad \psi\ (j_1 j_2 \quad j_1-1 \quad j_2)$$

بالمثل عندما تكون m مساوية للقيمة التى تلى " $j_1 + j_2 - 1$ " اى القيمة " $j_1 + j_2 - 2$ " يكون لدينا ثلاث حالات هى :

$$\Phi\,(j_1 j_2 \quad j_1+j_2 \quad j_1+j_2-2)$$

$$\Phi\,(j_1 j_2 \quad j_1+j_2-1 \quad j_1+j_2-2)$$

$$\Phi\,(j_1 j_2 \quad j_1+j_2-2 \quad j_1+j_2-2)$$

وتعتبر ناتجة من الجمع الخطى للمتجهات التالية :

$$\psi\,(j_1 j_2 \quad j_1 \quad j_2-2)$$

$$\psi\,(j_1 j_2 \quad j_1-1 \quad j_2-1)$$

$$\psi\,(j_1 j_2 \quad j_2-2 \quad j_2 \;)$$

وبمتابعة نفس هذا الاسلوب يتضح لنا اذاً انه بصفة عامة فان للقيمة " $m = j_1 + j_2 - k$ " يكون لدينا عددا من المتجهات ψ مساويا $(k + 1)$ هى :

$$\psi\,(j_1 j_2 \quad j_1-k \quad j_2 \;)$$

$$\psi\,(j_1 j_2 \quad j_1-k+1 \quad j_2-1 \;)$$

$$\psi\,(j_1 j_2 \quad j_1-k+2 \quad j_2-2 \;)$$

$$\vdots$$

$$\psi\,(j_1 j_2 \quad j_1 \quad j_2-k \;)$$

وبالجمع الخطى لهذه المتجهات نحصل على الحالات الكمية التالية :

$$\Phi\,(j_1 j_2 \quad j_1+j_2 \quad j_1+j_2-k)$$

$$\Phi\,(j_1 j_2 \quad j_1+j_2-1 \quad j_1+j_2-k)$$

$$\Phi\,(j_1 j_2 \quad j_1+j_2-2 \quad j_1+j_2-k)$$

$$\vdots$$

$$\Phi\,(j_1 j_2 \quad j_1+j_2-k \quad j_1+j_2-k)$$

ومع افتراض ان j_1 اصغر من j_2 وبسبب ان اصغر قيمة للعدد m_2 هى $-j_2$ (راجع معادلة (3.25)) اذاً اكبر قيمة للعدد k هو :

$$j_2 - k = - j_2$$

$$\therefore \quad k = 2\, j_2$$

$$\therefore \quad j_{min} = j_1 + j_2 - k = j_1 + j_2 - 2\, j_2 = j_1 - j_2$$

وهذا يوضح ان القيم الممكنة للعدد j هو: " $j_1 + j_2 \geqslant j \geqslant j_1 - j_2$ " اى ان عددها $(2\, j_2 + 1)$.

ولتوضيح استخدام تلك الاساسيات لنحاول الآن الحصول على المتجهات الايجينية فى حالة مزاوجة كميتى حركة زاوية كل منهما يساوى $\frac{1}{2}\hbar$ كما يحدث مثلا عند تفاعل بروتون وبروتون آخر او نيوترون ــ او تفاعل ميزون K مع نيوكليون (فى هذه الحالة j_1 او j_2 ترمزان لكمية الحركة المغزلية النظيرية) :

فى هذه الحالة " $j_1 = \frac{1}{2}$ " ، " $j_2 = \frac{1}{2}$ " فان :

$$\Phi\,(j_1 j_2 \quad j\,m) = \Phi_{1,1}$$
$$,\ \Phi_{1,-1}$$
$$,\ \Phi_{1,0}$$
$$,\ \Phi_{0,0}$$

حيث :

$$\Phi_{1,1} = \Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1}$$

$$\Phi_{1,-1} = \Psi_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \Phi_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,-1}$$

$$\Phi_{1,0} = a_1 \Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} + a_2 \Psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \phi_{\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},1,0}$$

$$\Phi_{0,0} = a_3 \Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} + a_4 \Psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \Phi_{\mp\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},0,0}$$

ونود الحصول على قيم المعاملات a_1 و a_2 و a_3 و a_4 .

سبق ان درسنا ان : " $\left[J_z , J_+\right] = J_+$ " ،
" $\left[J_- , J_z\right] = J_-$ " ، " $\left[J_+ , J_-\right] = 2\,J_x$ " ،
" $\left[J^2 , J_+\right] = 0$ " .

ونلاحظ ان الدوال " $\Phi_{1,1}$ و $\Phi_{1,-1}$ و $\Phi_{1,0}$ " تتصف بنفس قيمة J ولكن تختلف في قيمة J_z ومعنى ذلك ان تلك الدوال الثلاث تنتمي لنفس القيمة الايجينية للعاملة J ولذلك فهي تُكون مجموعة واحدة من ثـــلاث

دوال ولهذا السبب تسمى بالمجموعة " الثلاثية " (Triplet) . بينما الدالـة الرابعة $\Phi_{0,0}$ تكون مجموعة " فردية " (Singlet) . والمسألة التى تواجهنا الان تتلخص فى ايجاد المعاملات a_1 و a_2 و a_3 و a_4 .
(فيما بعد سوف يتضح لنا ان تلك المعاملات a_i's مرتبطة ارتباطا مباشـــرا بالكمية الفيزيائية المعروفة باسم المقطع المستعرض للتفاعلات المختلفة بين الجسيمـات الاولية والتى تعطينا مقياسا لاحتمالية حدوث تلك التفاعلات) .

لاتمام ذلك يستفاد من عاملات الرفع والخفض (Raising and Lowering Operators) J_+ و J_- التى اشرنا اليها توّا :

بتطبيق معادلة (3.15) على الدالة $\Psi_{½,-½}$ للجسيم الاول نحصـل على :

$$ {}_1J_+ \; {}_1\Psi_{½,-½} = C_+ \; {}_1\Psi_{½,½} \tag{5.11} $$

بينما معادلة (3.19) تؤدى الى :

$$ {}_1J_- \; {}_1\Psi_{½,½} = C_- \; {}_1\Psi_{½,-½} \tag{5.12} $$

$$ \therefore \; {}_1J_+ \left\{ {}_1J_- \; {}_1\Psi_{½,½} \right\} = {}_1J_+ \left\{ C_- \; {}_1\Psi_{½,-½} \right\} = C_- \left\{ {}_1J_+ \; {}_1\Psi_{½,-½} \right\} $$

$$ = C_- C_+ \; {}_1\Psi_{½,½} = \left| C_+ \right|^2 \Psi_{½,½} \tag{5.13} $$

وبضرب طرفى هذه المعادلة من جهة اليسار فى $\Psi^*_{½,½}$ واجراء التكامـل على الحيز المتاح ينتج

$$\int {}^{\sim}\Psi^{*}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \left({}_1J_+ \; {}_1J_-\right) {}^{\sim}\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \, dV = \left| C_+ \right|^2 \qquad (5.14)$$

ولكن بتطبيق معادلة (3.23) نجد ان :

$${}_1J_+ \; {}_1J_- = (J_1 - J_{1z})\,(J_1 + J_{1z} + 1) \qquad (5.15)$$

اذاً من معادلتي (5.14) و (5.15) نحصل على :

$$\left| C_+ \right|^2 = (J_1 - J_{1z})\,(J_1 + J_{1z} + 1)$$

$$\therefore \; \left| C_+ \right| = \sqrt{(J_1 - J_{1z})\,(J_1 + J_{1z} + 1)} \qquad (5.16)$$

وبنفس الاسلوب نحصل على :

$$\left| C_- \right| = \sqrt{(J_1 + J_{1z})\,(J_1 - J_{1z} + 1)} \qquad (5.17)$$

وبتطبيق هذه النتيجة على معادلة (5.12) نجد ان :

$${}_1J_- \; {}_1{}^{\sim}\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = C_- \; {}_1{}^{\sim}\Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{(\tfrac{1}{2} + (+\tfrac{1}{2}))\,(\tfrac{1}{2} - (+\tfrac{1}{2}) + 1)} \; {}_1{}^{\sim}\Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{(1)\,(1)} \; {}_1{}^{\sim}\Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = {}_1{}^{\sim}\Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \qquad (5.18)$$

وبالمثل :

$${}_2J_- \; {}_2{}^{\sim}\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = {}_2{}^{\sim}\Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \qquad (5.19)$$

من ناحية اخرى :

$$J_{-}\Phi_{1,1} = \sqrt{(1+1)\ (1-1+1)}\quad \phi_{1,0} = \sqrt{2}\ \Phi_{1,0} \qquad (5.20)$$

بينما

$$J_{-}\Phi_{1,1} = J_{-}\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = ({}_1J_{-} + {}_2J_{-})\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

$$= ({}_1J_{-} + {}_2J_{-})\ {}_1\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\ \ {}_2\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

$$= {}_1J_{-}\ {}_1\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\ {}_2\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + {}_2J_{-}\ {}_1\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\ \ {}_2\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

$$= {}_1\Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\ \ {}_2\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + {}_1\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\ \ {}_2\Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$$

$$= \Psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + \Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \qquad (5.21)$$

وعلى ذلك من معادلتي (5.20) و (5.21) نحصل على :

$$\sqrt{2}\ \Phi_{1,0} = \Psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + \Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \Phi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + \Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\right] \qquad (5.22)$$

$$\therefore \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (5.23)$$

$$،\quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (5.24)$$

وللحصول على a_3 ، a_4 نستفيد من خاصية التعامدية للدالتين $\Phi_{1,0}$ و $\Phi_{0,0}$ أى " $\Phi^*_{1,0}\,\Phi_{0,0} = 0$ " وبالتعويض المباشر نحصل على :

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi^*_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi^*_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[a_3\Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + a_4\Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\right] = 0$$

$$\therefore\ \frac{a_3}{\sqrt{2}} + \frac{a_4}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\therefore\ a_3 = -a_4 \qquad (5.25)$$

علاوة على ذلك نستطيع الاستفادة من خاصية العيارية للدالة $\Phi_{0,0}$ فنحصل على :

$$\left[a_3\Psi^*_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + a_4\Psi^*_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[a_3\Psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + a_4\Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\right] = 1$$

$$\therefore\ a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (5.26)$$

$$،\ a_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (5.27)$$

$$\therefore\ \Phi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} - \Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\right] \qquad (5.28)$$

بينما كما اوضحنا قبلا :

$$\Phi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} + \Psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right] \qquad (5.22)$$

$$\Phi_{1,1} = \Psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \qquad (5.29)$$

$$\Phi_{1,-1} = \Psi_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \qquad (5.30)$$

والان بتطبيق نفس الاسلوب الذى اتبعناه فى معالجة مزاوجه $j_1 = \frac{1}{2}\hbar$ و $j_2 = \frac{1}{2}\hbar$ لندرس تقارن $j_1 = 1\hbar$ مع $j_2 = \frac{1}{2}\hbar$ (مثل مزاوجـــة الحركة المدارية لجسيم الالكترون مع الحركة المغزلية الذاتية له او مزاوجة الحركـــــــة النظيرية لميزون بَاىْ (π-meson) مع الحركة المغزلية النظرية لنيوكليـــون وذلـــك اثناء استطارة الميزونات بَاىْ من اهداف نيوكليونية • (ادت مثل هذه الدراسات الـــى التعرف على العديد من الجسيمات الاولية الرنينيـــة)•

فى هذه الحالة يكون لدينا عدد ستة من الدوال المستقلة $(2x1+1)(2x\frac{1}{2}+1)$ ويمكننا التعبير عنها كما يلى فى صورة الدوال

$$\Phi(j_1\ j_2\ j\ m) = \phi_{j,m} \ , \ \Psi(j_1\ j_2\ m_1\ m_2) = \Psi_{m_1 m_2}$$ كما يلى :

$$\Psi(1 \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad \tfrac{1}{2}) = \Psi_{1,\frac{1}{2}}$$

$$\Psi(1 \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad -\tfrac{1}{2}) = \Psi_{1,-\frac{1}{2}}$$

$$\Psi(1 \quad \tfrac{1}{2} \quad 0 \quad \tfrac{1}{2}) = \Psi_{0,\frac{1}{2}}$$

$$\Psi(1 \quad \tfrac{1}{2} \quad 0 \quad -\tfrac{1}{2}) = \Psi_{0,-\frac{1}{2}}$$

$$\Psi(1 \quad \tfrac{1}{2} \quad -1 \quad \tfrac{1}{2}) = \Psi_{-1,\frac{1}{2}}$$

$$\Psi(1 \quad \tfrac{1}{2} \quad -1 \quad -\tfrac{1}{2}) = \Psi_{-1,-\frac{1}{2}}$$

6 $\Phi(1 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{3}{2} \quad \tfrac{3}{2}) = \Phi_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}$

$\Phi(1 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{3}{2} \quad \tfrac{1}{2}) = \Phi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}$

$\Phi(1 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{3}{2} \quad -\tfrac{1}{2}) = \Phi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}$

$\Phi(1 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{3}{2} \quad -\tfrac{3}{2}) = \Phi_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}}$

$\Phi(1 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2}) = \Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$

$\Phi(1 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2} \quad -\tfrac{1}{2}) = \Phi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$

ويتضح لنا مما سبق ان :

$$\Phi_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}} = \psi_{1,\frac{1}{2}} \tag{5.31}$$

$$\Phi_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}} = \psi_{-1,-\frac{1}{2}} \tag{5.32}$$

بينما المتجهات Ø الاربعة الباقية يمكننا التعبير عنها على الصورة :

$$\Phi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = b_1 \psi_{1,-\frac{1}{2}} + b_2 \psi_{0,\frac{1}{2}} \tag{5.33}$$

$$\Phi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = b_3 \psi_{0,-\frac{1}{2}} + b_4 \psi_{-1,\frac{1}{2}} \tag{5.34}$$

$$\Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = b_5 \psi_{1,-\frac{1}{2}} + b_6 \psi_{0,\frac{1}{2}} \qquad (5.35)$$

$$\Phi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = b_7 \psi_{0,-\frac{1}{2}} + b_8 \psi_{-1,\frac{1}{2}} \qquad (5.36)$$

حيث المعاملات b_i's تُفهم على انها عناصر مصفوفة التحويل التوحيدى بين الدوال Φ's ، الدوال ψ's • كما يجب تذكرنا أن هذه العناصر كل منها يساوى صفرا اذا كان عدد الكم m غير مساو لمجموع العددين m_1 و m_2 •

وحيث ان :

$$J_-\Phi_{jm} = \sqrt{(j+m)\ (j-m+1)}\ \Phi_{jm-1} \quad , \quad J_- = {}_1J_- + {}_2J_-$$

وأن

$${}_1J_-\psi_{m_1m_2} = \sqrt{(1+m_1)(2-m_1)}\ \psi_{(m_1-1),m_2}$$

عندما تكون " $m_1-1 \geqslant -1$ " وتساوى صفرا فى حالة " $m_1 - 1 < -1$ "
بينما

$${}_2J_-\ \psi_{m_1m_2} = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + m_2)\ (\tfrac{3}{2} - m_2)}\ \psi_{m_1,m_2-1}$$

عندما تكون " $m_2-1 \geqslant -\frac{1}{2}$ " وتساوى صفرا هى الاخرى فى حالة " $m_2-1 < -\frac{1}{2}$ " •

$$\therefore\ J_-\Phi_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}} = \sqrt{(\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2})\ (\tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2} + 1)}\ \Phi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{3}\ \ \phi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} \qquad (5.37)$$

ولكن " $\Phi_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}} = \psi_{1,\frac{1}{2}}$ "

$$\therefore \; \Phi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \; J_{-} \psi_{1,\frac{1}{2}} \qquad (5.38)$$

وأيضا

$$J_{-} \psi_{1,\frac{1}{2}} = {}_{1}J_{-} \psi_{1,\frac{1}{2}} + {}_{2}J_{-} \psi_{1,\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2} \; \psi_{0,\frac{1}{2}} + \psi_{1,-\frac{1}{2}} \qquad (5.39)$$

اذاً من معادلتى (5.37) و (5.39) نحصل على :

$$\Phi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{1,-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \; \psi_{0,\frac{1}{2}} \qquad (5.40)$$

أى ان " $b_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ " ، " $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ " .

وللحصول على باقى هذه المعاملات نبدأ بملاحظة أن :

$$J_{-} \Phi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)} \; \Phi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = 2\,\Phi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \; J_{-} \Phi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = 2\,\Phi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} \qquad (5.41)$$

بينما

$$J_{-} \Phi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \left\{ {}_{1}J_{-} + {}_{2}J_{-} \right\} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{1,-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{0,\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[{}_{1}J_{-} \psi_{1,-\frac{1}{2}} + {}_{2}J_{-} \psi_{1,-\frac{1}{2}} \right]$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{3}} \left[{}_{1}J_{-} \psi_{0,\frac{1}{2}} + {}_{2}J \; \psi_{0,\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{(1+1)\,(2-1)}\ \psi_{0,-\frac{1}{2}} + 0 \right]$$

$$+ \sqrt{\tfrac{2}{3}} \left[\sqrt{(1+0)\,(2-0)}\ \psi_{-1,\frac{1}{2}} + \sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})(\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2})}\,\psi_{0,-\frac{1}{2}} \right]$$

$$= 2\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\psi_{0,-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\psi_{-1,\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\psi_{0,-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\psi_{-1,\frac{1}{2}} \qquad (5.42)$$

وعلى ذلك من معادلتى (5.41) و (5.42) :

$$\Phi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\ \psi_{0,-\frac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\ \psi_{-1,\frac{1}{2}} \qquad (5.43)$$

بعد ذلك نلاحظ ان الدالة $\Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ عبارة عن جمع خطى للدالتين $\psi_{1,-\frac{1}{2}}$ و $\psi_{0,\frac{1}{2}}$ مثل الدالة $\Phi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}$ وحيث انهما تتصفان بالتعامدية اذا من معادلتى (5.35) و (5.40) نحصل على :

$$\Phi^{*}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \cdot \Phi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = 0$$

$$\therefore \left(b_5\psi_{1,-\frac{1}{2}} + b_6\psi_{0,\frac{1}{2}}\right)^{*} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\psi_{1,-\frac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\psi_{0,\frac{1}{2}}\right) = 0$$

$$\therefore\ b_6 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ b_5 \qquad (5.44)$$

$$\therefore \Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = b_5\ \psi_{1,-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} b_5\,\psi_{0,\frac{1}{2}} \qquad (5.45)$$

وللحصول على ماتساويه b_5 نستفيد من خاصية المعايرة لهذه الدالة $\Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ بمعنى ان :

$$\left[b_5\psi_{1,-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} b_5\psi_{0,\frac{1}{2}}\right]^* \cdot \left[b_5\psi_{1,-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} b_5\psi_{0,\frac{1}{2}}\right] = 1$$

$$\therefore \quad b_5 = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad (5.46)$$

$$\therefore \quad \Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi_{1,-\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{3}}\,\psi_{0,\frac{1}{2}} \qquad (5.47)$$

اخيرا بالنسبة للدالة $\Phi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$:

$$\Phi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = b_7\,\psi_{0,-\frac{1}{2}} + b_8\,\psi_{-1,\frac{1}{2}} \qquad (5.36)$$

نلاحظ انها عبارة عن جمع خطى لنفس الدوال $\psi_{0,-\frac{1}{2}}$ و $\psi_{-1,\frac{1}{2}}$ التى تتكون منها الدالة $\Phi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}$ (معادلة (5.43)) وعلى ذلك بالاستفادة من خاصيــة التعامدية لهاتين الدالتين نجد ان :

$$\Phi^*_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \cdot \Phi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\therefore \quad (b_7\psi_{0,-\frac{1}{2}} + b_8\psi_{-1,\frac{1}{2}})^* \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\psi_{0,-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_{-1,\frac{1}{2}}\right) = 0$$

$$\therefore \quad b_8 = -\sqrt{2}\; b_7 \qquad (5.48)$$

$$\therefore \quad \Phi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = b_7\,\psi_{0,-\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\; b_7\,\psi_{-1,\frac{1}{2}} \qquad (5.49)$$

ومرة اخرى بالاستفادة من خاصية المعايرة لهذه الدالة $\Phi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$ نحصل على :

$$(b_7 \Psi_{0,-\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\, b_7 \Psi_{-1,\frac{1}{2}})^* \cdot (b_7 \Psi_{0,-\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\, b_7 \Psi_{-1,\frac{1}{2}}) = 1$$

$$\therefore \quad b_7 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (5.50)$$

$$\therefore \Phi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{0,-\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \Psi_{-1,\frac{1}{2}} \qquad (5.51)$$

وعلى هذا تتلخص نتائج الحالة التى تقابل تقارن $j_1 = 1\,\hbar$ مع $j_2 = \frac{1}{2}\,\hbar$ بأن الدوال الايجينية لها عبارة عن الدوال الستة التالية :

$$\Phi_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}} = \Psi_{1,\frac{1}{2}} \qquad (5.52,a)$$

$$\Phi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{1,-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Psi_{0,\frac{1}{2}} \qquad (5.52,b)$$

$$\Phi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Psi_{0,-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} \Psi_{-1,\frac{1}{2}} \qquad (5.52,c)$$

$$\Phi_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}} = \Psi_{-1,-\frac{1}{2}} \qquad (5.52,d)$$

$$\Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Psi_{1,-\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{3}} \Psi_{0,\frac{1}{2}} \qquad (5.52,e)$$

$$\Phi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_{0,-\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \Psi_{-1,\frac{1}{2}} \qquad (5.52,f)$$

مثـال (٥ـ١) :

نتيجة تأثير مجال مغناطيسي خارجي $\vec{B}$ على حركة الالكترونات في الــــذرة الام يحدث انفلاق لمستويات طاقتها وهذا مايعرف بظاهرة زيمـان • وضح كيـــف ان العزم المغناطيسي الذرى $\vec{\mu}$ ليس بالضرورة ان ينطبق اتجاهه مع اتجاه كميـة الحركة الزاوية الكلية الخاصة بتلك الذرة $\vec{J}$ المساوية للجمع الاتجاهـــي $\vec{L} + \vec{S}$ حيث $\vec{L}$ يرمز للحركة الزاوية " المدارية " للالكترون ، $\vec{S}$ يرمز للحركة الزاويـــة المغزلية التلقائية له •

الحـــل :

نعلم من مبادئ علم الفيزياء الذرية ان الطاقة W للتفاعل بين $\vec{\mu}$ و $\vec{B}$ عبارة عن

$$W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

حيث

$$\vec{\mu} = \sum_i \left[\tfrac{1}{2} \left(\frac{e}{m}\right) \vec{\ell}_i + \left(\frac{e}{m}\right) \vec{\sigma}_i \right]$$

$$\therefore \; \mu = \tfrac{1}{2} \left(\frac{e}{m}\right) (\vec{L} + 2\vec{S})$$

$$= \tfrac{1}{2} \left(\frac{e}{m}\right) (\vec{L} + \vec{S} + \vec{S}) = \tfrac{1}{2} \left(\frac{e}{m}\right) (\vec{J} + \vec{S})$$

وهذا يوضح ان $\vec{\mu}$ ليس بالضرورة أن يوازى $\vec{J}$ نتيجة تقارن $\vec{S}$ مع $\vec{J}$ •

مثـال (٥ـ٢) :

اذا علمت ان مركبات متجه الحركة الدائرية المغزلية الذاتية J_x و J_y و J_z عبارة عن حاصل ضرب $\frac{1}{2}\hbar$ فى مصفوفات باولى على التوالى • اوجد مايساويه J^2 (هذا المثال ينطبق على الالكترون ــ الميون ــ النيوكليون ــ هيبرون سيجما ••الخ) •

الحـــل :

مصفوفات باولى سوف نتذكر عبارة عن :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

إذ•

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مثـال (٥ـ٣) :

لنفرض الكترون حركته المغزلية الذاتية اقترنت بحركته المدارية التى تقابل $l = 1$ بحيث ان كمية الحركة الزاوية الميكانيكية الكلية J تساوى $\frac{1}{2}\hbar$ • احسب القيمة المتوسطة لكل من m_1 و m_2 •

الحـــل :

بما ان " $j_1 = 1\hbar$ " و " $j_2 = \frac{1}{2}\hbar$ " بينما " $j = \frac{1}{2}\hbar$ "
إذاً " $m = \frac{1}{2}$ " وعلى ذلك تبعا للمعادلة (5.52,e)

$$\Phi(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\psi_{1,-\frac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,\psi_{0,\frac{1}{2}}$$

إذاً الحالة الكمية تنتمى الى " $j = \frac{1}{2}$ " و " $m = \frac{1}{2}$ " تتميز بما يلى :

إحتمالية تُساوى $\frac{٢}{٣}$ بأن تكون m_1 قيمتها "١" ، m_2 قيمتها " $-\frac{1}{2}$ "

واحتمالية تُساوى $\frac{١}{٣}$ بان تكون m_1 قيمتها " 0 " ، m_2 قيمتها " $\frac{1}{2}$ " .

$$\therefore\ \overline{m}_1 = (1)\cdot(\tfrac{2}{3}) + (0)\cdot(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{2}{3}$$

$$,\ \overline{m}_2 = (-\tfrac{1}{2})\cdot(\tfrac{2}{3}) + (\tfrac{1}{2})\cdot(\tfrac{1}{3}) = -\tfrac{1}{6}$$

ملحوظة : كما هو متوقع :

$$\overline{m} = \overline{m}_1 + \overline{m}_2 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}$$

مثل القيمة المنصوص عليها فى المسألة .

مثـال (٥ـ٤) :

الديوترون كنواه لذرة الديوتيريوم تمثل حالة الترابط المستقر الوحيد بين بروتون ونيوترون ، اشرح سبب ان هذه النواه تقابل ترابط مفرد اى $\phi_{0,0}$ بمفهوم معادلة (5.28) بالنسبة لحيز متجهات كمية الحركة الزاوية المغزلية النظيرية (Isotopic Spin Space) .

الحــل :

توضح القياسات العملية الخاصة بالديوترون أن هذه النواه تتميز بكمية حركـــة ميكانيكية مغزلية تساوى " $1\hbar$ " وأن هذا نتيجة خلط بين الحالة " $S = 1\hbar$ و $\ell = 0$ " بنسبة ٩٧,٠ والحالة " $S = 1\hbar$ و $\ell = 2\hbar$ " بنسبـــة ٠,٠٣ اى ان الحالة الكمية للديوترون مخلوط من $^3S_1$ و $^3D_1$ بالنســب الموضحة ٠

وبما ان النيوكليونات تتميز بتماثل زوجى بالنسبة لانعكاس الاحداثيـــات (Parity Operation) معنى ذلك ان تبادل الاحداثيات الكارتيزية بين البروتـون والنيوترون فى هذه النواه يتميز بدالة موجبة متماثلة حيث ان " $(-1)^{\ell}$ " يســاوى " $+1$ " فى حالة الديوترون بما ان " $\ell = 0$ و $\ell = 2$ " ٠ من ناحيــة اخــرى فان المشاهدة التجريبية توضح ايضا ان متجهى كمية الحركة المغزلية للبروتون وكميـــة الحركة المغزلية للنيوترون فى الديوترون متوازيان وهذا معناه ان الدالة الموجيــة المرتبطة بتلك الحركة المغزلية متماثلة أيضا ٠

وتبعا لمبدأ باولى للاستبعاد (Pauli Exclusion Principle) فـــان الدالة الموجية المحصلة التى تمثل حالة الترابط بين النيوترون والبروتون فى الديوتـرون يجب ان تتميز بالتضاد التماثلى (Antisymmetrical) اى ان :

$$(\psi)_{deuteron} = (\psi)_{space} \cdot (\psi)_{spin} \cdot (\psi)_{isospin}$$
$$= \text{antisymmetrical function}$$

$$\therefore (\psi)_{isospin} \cdot \text{ must be antisymmetrical}$$

وهذا معناه ان هذه المعادلة تقابل تلك المعطاه بمعادلة (5.28) اى $\Phi_{0,0}$٠

$$\therefore (\psi)^{deuteron}_{isospin} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} - \psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\right]$$

مثـال (٥_٥) :

فى ضوء المثال السابق اشرح سبب عدم مشاهدة التفاعل النووى التالى :

$$d + d \longrightarrow \alpha + \pi^{0}$$

الحـــل :

اى تفاعل نووى " قوى" يتميز ـ بجانب قوانين الحفظ (Conservation Laws) التى يتبعـها مثل قانون حفظ الطاقة ٠٠ الخ ـ بأنه يحافظ على كمية الحركة المغزليـــة النظيرية " $J = \tau$ " وكذلك المركبة العينية لها " $J_z = \tau_z$ " .

ومن التفاعل الموضح اعلاه نلاحظ ان :

الجسيم	τ	τ_z
الديوترون (d)	0	0
ألفـا (α)	0	0
ميزون باى التعادل (π^{0})	1	0

هذا معناه ان الحالة الابتدائية فى هذه المعادلة تتميز بالاعـداد "$\tau = 0$" و "$\tau_z = 0$" بينما الحالة النهائية تتميز بالاعداد " $\tau = 1$ و $\tau_z = 0$" ومعنـى ذلك ان هذا التفاعل نتوقع فعلا عدم حدوثه ومشاهدته حيث انه لايحافظ علـــــــى τ و τ_z .

بسم الله الرحمن الرحيم

الباب السادس

نظرية الاقلاق مع اعتبار تغير الزمن
(Time Dependent Perturbation Theory)

نود في هذا الباب دراسة بعض النقاط الخاصة بنظرية الاقلاق في ميكانيكا الكم مع الأخذ في الاعتبار ان دالة الحالة تعتمد على الزمن • وفي الحقيقة عندما تكون احتمالية تواجد مجموعة فيزيائية في اي من حالاتها المستقرة (Stationary States) متغيرة مع مرور الزمن فان تلك المجموعة يقال انها في حالة غير مستقرة (Nonstationary State) • وهناك طريقان متميزان عن بعضهما يحدث خلالهما تواجد مثل هذه الحالات الغير مستقرة :

أولهما عن طريق مؤثر خارجي يؤثر على المجموعة الفيزيائية بقوة خارجية متغيرة مع الزمن وهذا يجعل المجموعة الفيزيائية تنتقل من مستوى طاقة معين الى مستوى آخر • مثال ذلك امتصاص فوتون (Photon Absorption) بواسطة الكترون وبالتالي اضطراب هذا الالكترون وانتقاله من مستواه الاصلي الى مستوى طاقة اعلى •

وثانيهما عن طريق خاصية مميزة للمجموعة الفيزيائية نفسها نتيجة تواجدها في حالة مضمحلة (Degenerate State) وحينئذ وجد أن اى اقلاق غير متغير مع الزمن (وبالتالي غير قادر على التأثير على طاقة المجموعة الفيزيائية) ربما يجعلها تنتقل من حالتها الاصلية لحالة اخرى منتمية لنفس مستوى الطاقة الاصلي (أى حالة مضمحلة ايضا) • مثال ذلك استطارة حزمة من الجسيمات الاولية (الالكترونات ــ نيوكليونات ــ ميزونات ••• الخ) بواسطة مركز قوة ثابت (مثل نواه الذرة) حيث تنحرف تلك الجسيمات في اتجاه آخر دون تغير في طاقتها (حالة الاستطارة

المرنة (Elastic Scattering Case) • والمعالجة الرياضية لهاذين الطريقين واحدة ولو اننا سنُرجيء تفاصيل دراسة موضوع الاستطارة عموما للباب السابع •

هذه المعالجة تكوّن نظرية الاقلاق في ميكانيكا الكم مع تغيير احداثي الزمن • وبديهي اذًا أن في مثل هذا الموقف علينا ان نتعامل مع دوال الحالة المعتمدة على الزمن أي " $\psi = \psi(t)$ " •

وتبدأ هذه المعالجة الرياضية بفرض ان العاملة الهاميلتونية $\hat{H}$ عبارة عن جزئين احدهما $\hat{H}^{(o)}$ لايعتمد على الزمن والاخر $\hat{H}'$ يعتمد على الزمن احيانا وربما في بعض الاحيان يتميز بثباته هو الاخر • معنى ذلك أن :

$$\hat{H} = \hat{H}^{(o)} + \hat{H}' \qquad (6.1)$$

وعادة يُفترض ان الجزء $\hat{H}'$ يمثل نسبة صغيرة بالمقارنة مع الجزء الاصلي $\hat{H}^{(o)}$ ومطلوب حل المعادلة الموجية :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \qquad (6.2)$$

بفرض ان حلول المعادلة الموجية التي لاتحتوي على عاملة الاقلاق معلومة بمعنى ان لدينا :

$$i\hbar \frac{\partial \psi^{(o)}}{\partial t} = \hat{H}^{(o)} \psi^{(o)} \qquad (6.3)$$

وعليه سوف يكون مطلوب الحصول على الحلول المقابلة للحالات الكمية المستقرة فقط :

$$i\hbar \frac{\partial \psi_n^{(o)}}{\partial t} = \hat{H}^{(o)} \psi_n^{(o)} = E_n^{(o)} \psi_n^{(o)} \qquad (6.4)$$

$$\text{،} \quad \psi_n^{(o)} = {}_c\psi_n^{(o)} \; e^{-\frac{E_n \cdot t}{\hbar}} \qquad (6.5)$$

حيث $_c\psi_n^{(o)}$ ترمز للدوال الموجية العادية التى لاتعتمد على احداثى الزمـــن . وهنا يُتّبع اسلوب مشابه للاسلوب المستخدم فى نظرية الاقلاق التى لاتأخذ الزمن فـى الاعتبار . بمعنى التعبير عن الدالة ψ بدلالة $\psi^{(o)}$ وتصحيح " ψ' " :

$$\psi = \psi^{(o)} + \psi' \qquad (6.6)$$

وبالتعويض من (6.6) فى (6.2) يتضح ان :

$$i\hbar\left(\frac{\partial\psi^{(o)}}{\partial t} + \frac{\partial\psi'}{\partial t}\right) = \hat{H}^{(o)}\psi^{(o)} + H^{(o)}\psi' + H'\psi$$

وحيث ان " $i\hbar\frac{\partial\psi^{(o)}}{\partial t} = H^{(o)}\psi^{(o)}$ " تبعا لمعادلة (6.3) إذاً :

$$i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} - H^{(o)}\psi' = H'\psi \qquad (6.7)$$

وهنا يستخدم الفرض المميز لهذه المعالجة الرياضية الحالية وهو الخاص بالتعبير عـن التصحيح ψ' كمتسلسلة (متتالية) بدلالة الدوال الايجينية قبل تعرض المجموعة الفيزيائية لتأثير العاملة $\hat{H}'$ اى الدوال " $\psi_n^{(o)}$ " :

$$\psi' = \sum C_n(t)\ \psi_n^{(o)}$$

$$= \sum C_n(t)\ _c\psi_n^{(o)}\ e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \qquad (6.8)$$

وعلى ذلك بالتعويض عن ψ' فى معادلة (6.7) واجراء التفاضل نحصل على :

$$i\hbar\sum\frac{\partial C_n(t)}{\partial t}\ _c\psi_n^{(o)}\ e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} + \sum C_n(t)\ E_n\ _c\psi_n^{(o)}\ e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

$$- \sum C_n(t)\ \hat{H}^{(o)}\ _c\psi_n^{(o)}\ e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} = \hat{H}'\psi$$

$$\therefore \; i\hbar \sum \frac{\partial C_n(t)}{\partial t} \, {}_c\psi_n^{(o)} \, e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} = H'\psi$$

وبضرب المعادلة من جهة اليسار فى دالة ما " ${}_c\psi_m^{(o)}$ " واجراء التكامل على احداثى الحيز نجد أن :

$$i\hbar \frac{\partial C_m(t)}{\partial t} e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} = \int {}_c\psi_m^{(o)} \, H' \psi \, d\tau$$

وبما ان " $\psi_m^{(o)} = {}_c\psi_m^{(o)} \, e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}}$ "

$$\therefore \; \psi_m^{(o)*} = {}_c\psi_m^{(o)*} \; e^{+\frac{iE_m t}{\hbar}}$$

$$\therefore \; i\hbar \frac{\partial C_m(t)}{\partial t} = \int \psi_m^{(o)*} \, H' \psi \, d\tau \qquad (6.9)$$

هذه المعادلة لانستطيع استخدامها كوسيلة حسابية (ولو انها معادلة خالية من اى تقريب • واحيانا تستخدم فى معالجة مسألة الاستطارة) • ولذلك نـود حساب $C_m(t)$ بطريقة بها شىء من التقريب • ولعمل هذا نستخدم اسلـوب مشابه للمتبع فى نظرية الاقلاق الغير محتوية على احداثى الزمن • ونبدأ بالتعبير عن العاملة H' بالصورة :

$$\hat{H}' = \lambda H^{(1)} \qquad (6.10)$$

مع افتراض ان المجموعة الفيزيائية كانت فى الحالة " المستقرة " ψ_k قبل التأثيـر عليها بالعاملة $\hat{H}'$ وبهذا :

$$\psi' = \lambda \psi_k^{(1)} + \lambda^2 \psi_k^{(2)} + \lambda^3 \psi_k^{(3)} + \dots \qquad (6.11)$$

وبالتعويض فى معادلة (6.7) وفصل المعاملات المشتركة بتساوى قوى λ مع وضع λ يساوى واحد صحيح (وهذا لايؤثر على عمومية تلك المعالجة الرياضية، نحصل على :

$$i\hbar \frac{\partial \psi_k^{(1)}}{\partial t} - \hat{H}^{(o)} \psi_k^{(1)} = \hat{H}^{(1)} \psi_k^{(o)} \qquad (6.12)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_k^{(o)}}{\partial t} - \hat{H}^{(o)} \psi_k^{(2)} = \hat{H}^{(1)} \psi_k^{(1)} \qquad (6.13)$$

وبالتعبير عن الدوال ψ_k بدلالة الدوال الايجينية $\psi_n^{(o)}$ كما يلى (مع افتراض ان المعاملات الجديدة ϵ_n's لاتختلف كثيرا عن المعاملات C_n's) :

$$\psi_k^{(1)} = \sum \epsilon_n(t)\, \psi_n^{(o)} = \sum \epsilon_n(t)\; {}_c\psi_n^{(o)}\, e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \qquad (6.14)$$

ثم ضرب المعادلة الناتجة من التعويض فى معادلة (6.12) من جهة اليسار فى ${}_c\psi_l^{(o)}$ واجراء التكامل على احداثى الحيز نحصل على :

$$\int i\hbar\; {}_c\psi_l^{(o)*} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum \epsilon_n(t)\; {}_c\psi_n^{(o)}\, e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \right\} - \hat{H}^{(o)} \sum \epsilon_n(t)\; {}_c\psi_n^{(o)}\, e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \right] d\tau$$

$$= \int {}_c\psi_l^{(o)*}\, H^{(1)}\; {}_c\psi_k^{(o)}\, e^{-\frac{iE_k t}{\hbar}}\, d\tau$$

$$\therefore \int i\hbar\; {}_c\psi_l^{(o)} \left\{ \sum \frac{\partial \epsilon_n(t)}{\partial t}\; {}_c\psi_n^{(o)}\, e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} - \frac{i\,E_n}{\hbar} \sum \epsilon_n(t)\; {}_c\psi_n^{(o)}\, e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \right\} d\tau$$

$$- \int {}_c\psi_l^{(o)}\, \hat{H}^{(o)} \sum \epsilon_n(t)\; {}_c\psi_n^{(o)}\, e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}\, d\tau$$

$$= \int {}_c\psi_\ell^{(o)} \, H^{(1)} \, {}_c\psi_k^{(o)} \, d\tau$$

$$\therefore \; i\hbar \frac{\partial \epsilon_\ell(t)}{\partial t} e^{-\frac{iE}{\hbar} t} = \langle \ell | H^{(1)} | k \rangle \, e^{-\frac{iE_k t}{n}}$$

$$\therefore \; i\hbar \frac{\partial \epsilon_\ell(t)}{\partial t} = \langle \ell | H^{(1)} | k \rangle \, e^{\frac{i(E_\ell - E_k)t}{\hbar}} \qquad (6.15)$$

مع ملاحظة ان عنصر الصفوفة $\langle \ell | H^{(1)} | k \rangle$ يعتمد على الزمن من خلال العاملة $H^{(1)}$ • ويمكن ايجاد المعاملات $\epsilon_\ell(t)$ عن طريق اجراء التكامل بمعلومية سابق قيمها عند لحظة ابتدائيه معينة t_o :

$$\epsilon_\ell(t) = \epsilon_\ell(t_o) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_o}^{t} \langle \ell | H^{(1)} | k \rangle \, e^{\frac{i(E_\ell - E_k)t}{\hbar}} \, dt \qquad (6.16)$$

فاذا مافرض ان المجموعة الفيزيائية عند الزمن t_o بدايةً كانت متميزة بالحالة الكمية $\psi_k^{(o)}$ فما هى احتمالية ان نجد هذه المجموعة عند زمن لاحق t فى حالة كمية اخرى $\psi_\ell^{(o)}$ — حيث $\ell \neq k$ • فيزيائيا يتضح لنا ان عند اللحظة t_o فان كل المعاملات ϵ_n's تساوى صفرا فيما عدا ϵ_k • وهذا يعنى ان الدالة الموجية التقريبية عند الازمنة t المتتابعة تعطى بالعلاقة :

$$\psi(t) = \psi_k^{(o)}(t) + \sum \epsilon_n(t) \psi_n^{(o)}(t) \qquad (6.17)$$

وعلى ذلك لو أُجريت عملية قياس تجريبى على المجموعة الفيزيائية فان احتمالية تواجدها فى الحالة $\psi_\ell^{(o)}$ تكون عبارة عن :

$$P^\ell(t) = |\epsilon_\ell(t)|^2 \qquad (6.18)$$

حيث

$$\epsilon_{\ell}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_o}^{t}\left\langle \ell \left| H^{(1)} \right| k \right\rangle e^{\frac{i(E_{\ell}-E_k)t}{\hbar}} \qquad (6.19)$$

وقبل امكانية اجراء التكامل فى (6.19) علينا ان نتصور ماذا حدث عند اللحظة t_o وبالقرب منها عند بدء التجربة • ولكن نظرا لصعوبة هذا لعدم معرفتنا مـــدى قرب هذا التصور من الواقع فان المعتاد للسهولة افتراض ان عاملة الاقلاق بدأ تأثيرهـــا على المجموعة الفيزيائية عند الزمن " $t_1 = -\infty$ " تبعا للفرض التالى :

$$H^{(1)}(t) = e^{\alpha t} H_o^{(1)} \qquad (6.20)$$

على افتراض ان α صغير • وفائدة ذلك الاختيار انها تضمن التخلصـــن اى متغيرات انتقالية لو وجدت • وباستخدام هذا الفرض نحصل على :

$$\epsilon_{\ell}(t) = -\frac{\left\langle \ell \left| H_o^{(1)} \right| k \right\rangle e^{\alpha t} e^{\frac{i(E_{\ell}-E_k)t}{\hbar}}}{(E_{\ell} - E_k) - i\alpha\hbar}, \quad \ell \neq k \quad (6.21)$$

وعلى ذلك فان الاحتمالية $P^{\ell}(t)$:

$$P^{\ell}(t) = \frac{(\left\langle \ell \left| H_o^{(1)} \right| k \right\rangle)^2 e^{2\alpha t}}{(E_{\ell} - E_k)^2 + \alpha^2 \hbar^2} \qquad (6.22)$$

وهى تعطينا الاحتمالية الكلية(Total Probability) بان المجموعة الفيزيائيـــة ـ بداية من الزمن " $t_o = -\infty$ " ـانتقلت من الحالة الكمية k الى الحالة الكمية ℓ عند زمن ما • وحيث ان مايقاس بالتجربة هو معدل ازدياد هـــــذه الاحتمالية (مثلا يقابل تزايد عدد الجسيمات الاولية المسجلة بالكاشف النووى) لذلك علينا ان نحسب " $\partial P^{\ell}(t)/\partial t$ " باستخدام معادلـــــة (6.22) لنحصل على :

$$\frac{\partial P^{\ell}(t)}{\partial t} = \frac{2\alpha\,(\langle \ell\,|H_o^{(1)}|\,k\rangle)^2\; e^{2\alpha t}}{(E_\ell - E_k)^2 + \alpha^2 h^2} \qquad (6.23)$$

ولو تذكرنا تعريف وبعض خصائص دالة ديراك δ :

$$\delta(E_\ell - E_k) = \lim_{\alpha \to o} \frac{\frac{\alpha}{\pi}}{(E_\ell - E_k)^2 + \alpha^2}$$

$$، \quad \left|\alpha\,(E_\ell - E_k)\right| = \frac{\delta\,(E_\ell - E_k)}{\alpha}$$

$$، \int_{-\infty}^{\infty} \delta\,(E_\ell - E_k)\; d\,(E_\ell - E_k) = 1$$

$$\frac{\partial P^{\ell}(t)}{\partial t} = \frac{2\pi}{\hbar}\,|\langle \ell\,|\,H_o^{(1)}|\,k\rangle|^2\;\delta\,(E_\ell - E_k) \qquad (6.24)$$

هذا التعبير يعطينا المعدل الزمنى للاحتمالية التى نعنيها فى جميع الاتجاهات الممكنة فى الحيز المتاح . ولكن الوضع التجريبى فى المعمل حقيقته ان القياسات تتم فى مدى محدود من الزوايا ومن الطاقة (بالنسبة للمثال الذى اشرنا اليه تواً وهو الكاشف النووى فان مثل هذا الجهاز يُضبط بالنسبة لمنوح الجسيمات الاولية اللازم كشفها عند زاوية معينة ويُسمح بكشف حزمة من تلك الجسيمات ذات مدى طاقة محدد) فاذا عبرنا عن مايقيسه الجهاز بالرمز dN فيكون هذا مساويا لحاصل ضرب " كثافة الحالات النهائية $\rho(E_\ell)$ " فى " مدى الطاقة dE_ℓ التى تقاس بالتجربة " اى أن :

$$dN = \rho\,(E_\ell)\; dE_\ell \qquad (6.25)$$

وعلى ذلك تأخذ معادلة (6.24) الصورة التالية :

$$\frac{\partial P^{\ell}(t)}{\partial t} = \int \frac{2\pi}{h} \left|\langle \ell \,|\, \hat{H}_o \,|\, k_o \rangle\right|^2 \delta(E_\ell - E_k)\rho(E_\ell)\; d(E_\ell - E_k)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial P^{\ell}(t)}{\partial t} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\langle \ell \,|\, \hat{H}_o^{(1)} \,|\, k \rangle\right|^2 \rho(E_\ell) \qquad (6.26)$$

هذه المعادلة تُعرف باسم " القاعدة الذهبية Golden Rule "، وتعتبر من اهم العلاقات الرياضية على الاطلاق في علم الفيزياء ـ على سبيل المثال هي العلاقة الاساسية لحساب مايعرف بالمقطع المستعرض لاستطارة الجسيمات الاولية • وسوف يتضح لنا ذلك في الباب السابع باذن الله تعالى •

مثال (٦ـ١) :

اذا علمت ان جزئ مادة النوشادر (الامونيا Ammonia) يتركب من ذرة نيتروجين واحدة مرتبطة بثلاث ذرات ايدروجين مُكونين مايشبه الشكل الهرمي باحتمالين احدهما ان تكون ذرة النيتروجين في مستوى اعلى من مستوى ذرات الايدروجين الثلاث والآخر ان تكون ذرة النيتروجين في مستوى اسفل من مستوى تلك الذرات • احسب الاحتمالية الكمية الخاصة بهما • والقيم الايجينية لهما •

الحل :

لنفرض ان هاتين الحالتين هما متجه الكت $|1\rangle$ ومتجه الكت $|2\rangle$ وهما تُعتبران المتجهات الايجينية للجزء الاكبر H_o من الهاميلتونية الخاصة بهذه المجموعة الفيزيائية ، ولكن مزاوجة هاتين الحالتين نتيجة التفاعل بينهما الذى يمثل بجزء صغير $\hat{H}^{(1)}$ من الهاميلتونية فان $|1\rangle$ ، $|2\rangle$ لاتكونا متجهات ايجينية للهاميلتونية الكلية $(\hat{H}_o + \hat{V})$ • فاذا كانت

$$\hat{H}_o |1\rangle = E_o |1\rangle \quad , \quad \hat{H}_o |2\rangle = E_o |2\rangle , \quad \hat{H}_{11} = \hat{H}_{22} = E_o$$

$$\hat{H}_{12} = \hat{H}_{21} = -\beta$$

حيث $H_{12} = \langle 1 | \hat{H}^{(1)} | 2 \rangle$ ...الخ .

فان بتطبيق العلاقة (6.15) :

$$i\hbar \frac{\partial \epsilon_\ell(t)}{\partial t} = \langle \ell | \hat{H}^{(1)} | k \rangle e^{\frac{i(E_\ell - E_k)}{\hbar}} \qquad (6.15)$$

على المجموعة الفيزيائية التى نناقشها نجد ان

$$i\hbar \frac{\partial \epsilon_1(t)}{\partial t} = H_{11}\,\epsilon_1(t) + H_{12}\,\epsilon_2(t)$$

$$، \quad i\hbar \frac{\partial \epsilon_2(t)}{\partial t} = H_{22}\,\epsilon_2(t) + H_{21}\,\epsilon_1(t)$$

$$\therefore \quad i\hbar \frac{\partial \epsilon_1}{\partial t} = E_o \epsilon_1 - \beta \epsilon_2$$

$$، \quad i\hbar \frac{\partial \epsilon_2}{\partial t} = -\beta \epsilon_1 + E_o \epsilon_2$$

$$\therefore \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left[\epsilon_1 + \epsilon_2\right] = (E_o - \beta)(\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

$$، \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left[\epsilon_1 - \epsilon_2\right] = (E_o + \beta)(\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

$$\therefore \quad \left[\epsilon_1 + \epsilon_2\right] = a\, e^{-\frac{i(E_o - \beta)t}{\hbar}}$$

$$، \quad \left[\epsilon_1 - \epsilon_2\right] = b\, e^{+\frac{i(E_o + \beta)t}{\hbar}}$$

حيث a و b ثابتان . واذا فرض ان عند اللحظة $t = 0$ كانت المجموعـــة الفيزيائية فى الحالة الكمية $|1\rangle$

$$\therefore \quad \epsilon_1(t) = e^{-\frac{iE_o t}{\hbar}} \cos \frac{\beta t}{\hbar}$$

$$، \quad \epsilon_2(t) = i\, e^{-\frac{iE_o t}{\hbar}} \sin \frac{\beta t}{\hbar}$$

$$\therefore \quad |\epsilon_1(t)|^2 = |\epsilon_2(t)|^2$$

بعد ذلك نلاحظ ان مصفوفة الهاميلتونية عبارة عن $\begin{pmatrix} E_o & -\beta \\ -\beta & E_o \end{pmatrix}$ وهذا معناه

$$(E_o - \lambda)^2 - \beta^2 = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = E_o \mp \beta$$

ومن دراستنا فى الباب الخامس نلاحظ ايضا ان :

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle)$$

$$، \quad |\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle)$$

مثـال (٦ـ٢) :

احسب الاحتمالية $|\epsilon_-(t)|^2$ انه يبدأ بالجسيم K^o (عند "$t = 0$") ينتج عند لحظة لاحقة " $t = t$ " الجسيم المضاد له $\overline{K^o}$.

الحـــل :

من اساسيات فيزياء الجسيمات الاولية (Elementary Particle Physics)
معلوم ان الميزون K^o ينتج اثناء التفاعلات القوية (Strong Interactions)
مثل التفاعل التالي بين ميزونات باى السالبه (π^--meson) وهدف بروتونى :

$$\pi^- + P \longrightarrow \Lambda + K^o$$

حيث Λ هو جسيم الهايبرون المتعادل (Λ-Hyperon) . وعلى ذلــــك
يمكن اعتبار K^o حالة ايجينية للهاميلتونية الخاصة بمثل هذا التفاعل القــــوى
($|K^o\rangle$) . وبالمثل الميزون المضاد له $\overline{K^o}$ يمكن اعتباره حالة اجينيـــة
($|\overline{K^o}\rangle$) للهاميلتونية الخاصة بقناة اخرى للتفاعل القوى نفسه يؤدى الى :

$$\pi^- + P \longrightarrow P + K^o + \overline{K^o}$$

وعلى هذا فان $|K^o\rangle$ ، $|\overline{K^o}\rangle$ متجهات ايجينية لهاميلتونية التفاعل القوى $\hat{H}_o$.
من ناحية اخرى فانه في غياب هذه التفاعلات القوية فان هذه الميزونات تتآكل تلقائيـــا -
بعضها يتميز بمتوسط عمر (0.5×10^{-8} sec.) والبعض الاخر يتميز بمتوسط عمـر
أقصر بكثير (0.86×10^{-10} sec.) وعادة يرمز لهما K^o_{Long} ، K^o_{short}
على التوالى . حيث يمثلان الجمع الخطى للمتجهات الايجينية $|K^o\rangle$ و $|\overline{K^o}\rangle$
كما يلى (بنفس المفهوم الذى درسناه في الباب الخامس) :

$$K^o_{Long} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^o\rangle + |\overline{K^o}\rangle\right)$$

$$, \quad K^o_{Short} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^o\rangle - |\overline{K^o}\rangle\right)$$

وهذا التآكل الذى نشير اليه يحدث عن طريق تفاعل ضعيف (Weak Interaction)
يتميز بهاميلتونية تمثل بجزء يسير $\hat{H}_W$ للغاية بالمقارنة مع هاملتونية التفاعل القـــوى
$\hat{H}_o$. ونتيجة تأثير $\hat{H}_w$ فان $|K^o\rangle$ و $|\overline{K^o}\rangle$ لاتكونا حينئذ ايجينيـــة

للهاميلتونية الكلية $(\hat{H}_o + \hat{H}_W)$ — ولو انهما كذلك بالنسبة لهاميلتونية التفاعل القوى $\hat{H}_o$ • وقد وُجد أن :

$$H_{11} = H_{22} = E_o + C$$

$$H_{12} = H_{21} = C$$

حيث

$$2\,C = \alpha - i\beta$$

ونستطيع التعبير عن سعة الاحتمالية لكل من الحالتين K^o ، $\overline{K^o}$ كما يلى :

$$\epsilon_+ = \langle K^o | \psi \rangle \quad , \quad \epsilon_- = \langle \overline{K^o} | \psi \rangle$$

وباتباع نفس الاسلوب الذى استخدم فى مثال (٦ـ٢) نحصل على :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left| \epsilon_+ + \epsilon_- \right| = (E_o + 2\,C)(\epsilon_+ + \epsilon_-)$$

$$، \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left| \epsilon_+ - \epsilon_- \right| = E_o\,(\epsilon_+ - \epsilon_-)$$

$$، \quad \left| K^o_{Long} \right\rangle = \left| K^o_1 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| K^o \right\rangle + \left| \overline{K^o} \right\rangle \right)$$

$$\left| K^o_{Short} \right\rangle = \left| K^o_2 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| K^o \right\rangle - \left| \overline{K^o} \right\rangle \right)$$

حيث سعتا الاحتمالية المقابلة لكل من هاتين الحالتين هما $\epsilon_1(t)$ و $\epsilon_2(t)$ وإذا :

$$\epsilon_1(t) = \left\langle K^+_1 \middle| \psi \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_+ + \epsilon_-)$$

$$، \quad \epsilon_2(t) = \left\langle K^+_2 \middle| \psi \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_+ - \epsilon_-)$$

$$\therefore \quad \epsilon_1(t) = \epsilon_1(o)\, e^{-\frac{i(E_o+2C)t}{\hbar}}$$

$$، \quad \epsilon_2(t) = \epsilon_2(o)\, e^{-\frac{iE_o t}{\hbar}}$$

وحيث اننا بدأنا بالجسيم K^o فمعنى ذلك $\epsilon_+(o) = 1$ ، $\epsilon_-(o) = 0$

$$\therefore \quad \epsilon_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\left[\frac{\beta + i(\alpha + E_o)}{\hbar}\right]\cdot t}$$

$$, \quad \epsilon_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\frac{iE_o t}{h}}$$

وهنا نلاحظ ان :

$$\left|\epsilon_1(t)\right|^2 \sim e^{-\frac{2\beta t}{\hbar}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\therefore \quad \tau \sim \frac{\hbar}{2\beta}$$

مثال (٦-٣) :

اشرح مفهوم ظاهرة موسباور (Mössbauer Effect) فى اطار نظريـــــة الاقـلاق •

الحــل :

تتميز ظاهرة موسباور بان داخل بلورة ما يحدث ان احد انوية ذراتها (نـــواه مشعة) يصدر اشعاعا (فوتون) فترتد البلورة كوحدة متكاملة وليست النواه المشعـــة بمفردها ولما كانت كتلة البلورة $(M_{crystal})$ كبيرة جدا (خلاف كتلة اى ذرة مفردة)

فان طاقة ارتدادها كوحدة تصبح صغيرة للغاية بحيث عمليا يكون الفوتون الناتج من تخلص البلورة من اضطرابها له طاقة مساوية لطاقة الفوتون الاصلى الصادر من النواه المشعة .

معنى ذلك ان الوضع الفيزيائى لظاهرة موسباور ممكن تمثيله بتعرض مجموعة فيزيائية وهى البلورة لدفع (Impulse) يتمثل فى الفوتون الصادر من النواه المشعة بتردد معين يؤثر على البلورة وهى فى حالتها الارضية فتنتقل الى حالة اضطراب ضمن أنماطها التذبذبية ثم يتم صدور فوتون جديد نتيجة عودة البلورة من حالة الاضطراب الى حالتها الارضية مرة اخرى . وعلى ذلك يمكننا التعبير عن الحالة الموجية للبلورة بمعادلة شرودنجر على النحو التالى :

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\hat{K} + \hat{V} + \hat{I} \right]$$

حيث $\hat{K}$ عاملة طاقة الحركة (Kinetic Energy) بدون الدفع .
$\hat{V}$ عاملة طاقة الوضع (Potential Energy) بدون الدفع .
$\hat{I}$ عاملة طاقة الدفع (Impulse Energy) بمعنى ان القوة F
الناتجة من الفوتون الصادر من النواه المشعة عبارة عن " $F(t) = - \frac{\partial I}{\partial x}$ "
حيث للسهولة نتحدث بالنسبة لاتجاه خطى x مفرد . اى ان :

$$I = - F.x = - P.x\, \delta(t) \quad , \qquad I_{x=0} = 0$$

وحيث انه يمكننا خلال عملية الدفع اهمال كل من طاقة الحركة وطاقة الوضع بالنسبة للدفع نفسه اذا تصبح معادلة شرودنجر على النحو التالى :

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = I\ (x,t)\, \psi$$

$$\therefore \quad i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - P.x\, \delta(t)\, \psi$$

وباجراء التكامل ووضع $\psi = \psi_i$ عند " $t = 0$ " ، $\psi = \psi_f$
عند " $t = t$ "

$$\therefore \; i\hbar \left[\ln \psi_f - \ln \psi_i \right] = -P.x$$

$$\therefore \; \psi_f(x) = \psi_i(x)\, e^{\frac{iP.x}{\hbar}}$$

مع ملاحظة ان تلك الحالة الكية النهائية للبلورة $\psi_f(x)$ ليست احد المتجهات الايجينية لتلك المجموعة الفيزيائية • ولكن يمكننا التعبير عنها بدلالة المتجهات الايجينية $\psi_n(x)$ مع الاستفادة بما تتميز به $\psi_n(x)$ من خاصيتى المعايرة والتعامدية

$$\therefore \; \psi_f(x) = \psi_i(x)\, e^{\frac{iP_x}{\hbar}} = \sum_n \epsilon_n \psi_n(x)$$

$$\therefore \; \left|\epsilon_n\right|^2 = \int \psi_n^*(x)\, \psi_n(x)\, e^{\frac{iP.x}{\hbar}}\, dx$$

وبفرض ان البلورة عبارة عن متذبذب توافقى خطى واصلا فى حالته الارضية بمعنى :

$$\psi_o(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\, a}\right)^{1/2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

حيث a تقابل السعة الكلاسيكية للمتذبذب •

وعلى هذا فان الاحتمالية $\left|\epsilon_1\right|^2$:

$$\left|\epsilon_1\right|^2 = e^{-\frac{p^2 a^2}{\hbar^2}} = e^{-k^2 a^2}$$

حيث " $k = \frac{p}{\hbar}$ " وهو العدد الموجى •

وكتطبيق هام لاساسيات نظرية الاقلاق مع تغير الزمن لندرس :

التفاعل المتبادل للمادة في أصغر صورها (الالكترون — الذرة — ٠٠٠) مع الاشعاع الكهرومغناطيسي :

لنتصور ان مجموعة فيزيائية في ابسط صورها مثل الكترون مضطرب في ذرته الام • حيث يشاهد أن خلال فترة زمنية في المتوسط حوالي 10^{-8} من الثانية تُشع هذه الذرة فوتون في اتجاه ما — أو على عكس ذلك ذرة في حالتها الارضية تحت ظروف مناسبة يتم لها ان تمتص فوتون بواسطة احد الكتروناتها ونتيجة ذلك تصبح الذرة ككل في حالة مضطربة (Excited State) • ونود الان تطبيق اساسيات نظرية الاقلاق التي اشرنا اليها للان في هذا الباب بغرض ان نحصل على :

- سعة احتمالية انتقال المجموعة الفيزيائية من حالتها الابتدائية الى النهائية •
- متوسط عمر الحالات المضطربة •
- معدل انبعاث الطاقة الاشعاعية والتوزيع الاتجاهي لها •
- قواعد الاختيار (Selection Rules) التي يتم على اساسها الانتقال من حالة الى اخرى • على فرض ان سلوك المجموعة يشابه سلوك المتذبذب التوافقي •

ونبدأ بالاشارة الى ان اساسيات الكهروديناميكا توضح ان اهم مميزات الاشعاع الكهرومغناطيسي تتضح من علاقات ماكسويل التالية حيث نستخدم الرموز التي تحمل المعنى المعتاد لها (راجع مثال محلول (٦-٤) صفحة ١١١) :

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0\ , \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}-\frac{\rho}{\epsilon}=0 \\ &\vec{\nabla}\times\vec{B}-\mu\epsilon\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu\vec{j}\ , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \\ &\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\phi \end{aligned}\right\}\qquad(6.27)$$

وفي ضوء ذلك فان المجموعة الفيزيائية التي تشتمل على الكترون واشعاع كهرومغناطيسي تتميز بهاملتونية عبارة عن :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + eV$$

$$= \frac{1}{2m}\left[p^2 - e\vec{p}\cdot\vec{A} - e\vec{A}\cdot\vec{p} + e^2A^2\right] + eV$$

$$= \frac{1}{2m}\left[p^2 - e\vec{p}\cdot\vec{A} - e\vec{A}\cdot\vec{p} + 0\right] + eV$$

$$= \frac{1}{2m}\left[p^2 + eV\right] + \left[-\frac{e}{2m}(\vec{p}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{p})\right]$$

$$= \hat{H}^{(0)} + \hat{H}^{(1)} \qquad (6.28)$$

فاذا فرضنا ان نتيجة تفاعل المتذبذب مع الاشعاع يحدث انتقال للمتذبذب من الحالة $|k\rangle$ الى الحالة $|l\rangle$ فمعنى ذلك ان عنصر المصفوفة الذي يمثل التفاعل الذي يربط بين هاتين الحالتين هو :

$$\langle l|\hat{H}^{(1)}|k\rangle = -\frac{e}{2m}\int \psi_l^*\left[\vec{p}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{p}\right]\psi_k\, d\tau \qquad (6.29)$$

$$= -\frac{e}{2m}\int\left[\psi_l^*\vec{p}\cdot\vec{A}\psi_k + \psi_l^*\vec{A}\cdot\vec{p}\psi_k\right] d\tau$$

وبافتراض ان " $\text{div}\,\vec{A} = 0$ " اذا الحد الاول من الطرف الايمن من هذه المعادلة يصبح :

$$\psi_l^* \left[\vec{p} \cdot \vec{A} \psi_k \right] = \psi_l^* \left[-i\hbar \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \psi_k) \right]$$

$$= \psi_l^* \left[-i\hbar \left\{ (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \psi_k + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \psi_k) \right\} \right]$$

$$= \psi_l^* \left[-i\hbar \left\{ 0 + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \psi_k) \right\} \right]$$

$$= \psi_l^* \left[\vec{A} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla} \psi_k) \right]$$

$$= \psi_l^* \vec{A} \cdot \vec{p} \psi_k \qquad (6.30)$$

$$\therefore \left\langle l \left| \hat{H}^{(1)} \right| k \right\rangle = -\frac{e}{2m} \int \left[\psi_l^* \vec{A} \cdot \vec{p} \psi_k + \psi_l^* \vec{A} \cdot \vec{p} \psi_k \right] d\tau$$

$$= -\frac{e}{m} \int \psi_l^* \vec{A} \cdot \vec{p} \psi_k \, d\tau \qquad (6.31)$$

أو بالمقابلـة :

$$\left\langle l \left| \hat{H}^{(1)} \right| k \right\rangle = -\frac{e}{m} \int \psi_l^* \vec{p} \cdot \vec{A} \psi_k \, d\tau \qquad (6.32)$$

هاتان العلاقتان (6.31) و (6.32) يمكننا تفهمهما بدلالة المبـادئ العامة لميكانيكا الكم في ضوء ان عنصر المصفوفة $\left\langle l \left| \hat{H}^{(1)} \right| k \right\rangle$ يعنـي عموما مايلي :

" < الحالة الابتدائية | العاملـة | الحالة النهائية > " .

وعلى ذلك معادلة (6.31) يمكن فهمها على انها تختص بمجموعة باعثة للاشعاع اذ نعتبر " ψ_k " هي الحالة الابتدائية التي تشتمل على الالكترون (او الـذرة

أو المتذبذب التوافقى ٠٠٠) وهو فى حالة كمية مضطربة ٠ وتأثير العاملة " $\hat{p}$ " على هذه الحالة " ψ_k " يتسبب فى انتقال الالكترون الى الحالة " ψ_ℓ " مصحوبا بانطلاق فوتون منه ٠ اى ان الحالة النهائية تشتمل على الكترون (ودالته الموجية ψ_ℓ) وفوتون (ودالته الموجية $\vec{A}$) ٠

وعلى العكس معادلة (6.32) يمكن فهمها على انها تختص بامتصاص الاشعاع الكهرومغناطيسى اذ نعتبر " $\vec{A}\,\psi_k$ " هى الحالة الابتدائية التى تشتمل على " الكترون وفوتون " (حيث ψ_k جزء الدالة الموجية الذى يخص الالكترون ، $\vec{A}$ جزء الدالة الموجية الذى يخص الفوتون) ٠ ونتيجة تاثير العاملة " $\hat{p}$ " على هذه الحالة " $\vec{A}\,\psi_k$ " يتم التقاط الفوتون بواسطة الالكترون اى يتم امتصاص الاشعاع والانتقال الى الحالة النهائية " ψ_ℓ " التى لايتواجد فيها اى فوتون ٠ ولتمييز هاذين الوضعين يمكننا كتابة عنصر المصفوفة فى معادلة (6.31) فى حالة انبعاث الفوتون بالصورة التالية : " $\langle \vec{k}\;\ell \,|\, H^{(1)} \,|\, k \rangle$ " ـ بينما فى حالة امتصاص الفوتون " $\langle \ell \,|\, H^{(1)} \,|\, k\;\vec{k} \rangle$ " ٠ وكما هو موضح بهاتين المعادلتين فان هاذين العنصرين متساويان ٠

وقبل محاولة استكمال المعالجة الرياضية لهذه الحالة التى ندرسها علينا تحديد الحالة الكمية للفوتون " $\vec{A}$ " حيث فى المعتاد يُعطى تردد الاشعاع واتجاه انطلاقه ومعنى ذلك وجوب تمثيله بموجه مستوية على النحو المماثل لمايلى :

$$\vec{A} = \vec{1}_A \cdot N \cdot \cos 2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

$$= \vec{1}_A \cdot N \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \qquad (6.33)$$

وفيها $\vec{1}_A$ يرمز لوحدة المتجهات فى الاتجاه الخاص بالمتجه $\vec{A}$ ٠

بينما N ثابت معايرة (Normalization constant) يقابل سعة الازاحة المصاحبة لموجه الاشعاع ٠

k متجه " العدد الموجي " في اتجاه انطلاق الاشعاع (ونلاحظ هنا أن كون "div A = 0" يعني ان " $\vec{1}_A \cdot \vec{k} = 0$ ") .

ω التردد الزاوي للاشعاع = kc حيث c سرعة الضوء وهي كما نعلم تحقق المعادلة $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.

ونلاحظ أن معادلة (6.33) تعني ان موضع الفوتون غير محدد بالمرة . بينما نستطيع تحديد كثافة الطاقة الاشعاعية $\mathcal{E}$ المرتبطة به وهي :

$$\mathcal{E} = \epsilon_0 \left(-\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 = \frac{k^2 \cdot N^2}{\mu_0} \cos^2 (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \qquad (6.34)$$

ومعنى ذلك ان متوسط تلك الكثافة ـ $\bar{\mathcal{E}}$ ـ في الحيز هو

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{k^2 N^2}{\mu_0} \overline{\cos^2 (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \frac{k^2 N^2}{2 \mu_0} \qquad (6.35)$$

واذا افترضنا ان الحالة الابتدائية تشتمل على فوتون واحد وان حجم الحيز المتاح Ω'

$$\therefore \bar{\mathcal{E}} = \frac{\hbar \omega}{\Omega'} = \frac{\hbar kc}{\Omega'} = \frac{k^2 N^2}{2 \mu_0} \qquad (6.36)$$

وبذلك يمكننا التعويض عن ثابت المعايرة N كما يلي :

$$N = \sqrt{\frac{2 \mu_0 c \hbar}{k \Omega'}} = \sqrt{\frac{2 \hbar}{\epsilon_0 \omega \Omega'}} \qquad (6.37)$$

$$\therefore \vec{A} = \sqrt{\frac{2 \hbar}{\epsilon_0 \omega}} \cdot \vec{1}_A \cdot \cos (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \qquad (6.38)$$

واذا عبرنا عن cos (....) بدلالة $e^{i(\cdots)}$:

$$\therefore \vec{A} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 \hbar}{\epsilon_0 \omega}} \cdot \vec{1}_A \cdot \left[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \qquad (6.39)$$

وبالتعويض عن متجه الجهد $\vec{A}$ بهذه النتيجة فى معادلة عنصر المصفوفة نحصل على :

$$\left\langle \ell \left| \hat{H}^{(1)} \right| k \right\rangle = -\frac{e}{m} \int \psi_\ell^* \vec{p} \cdot \vec{A}\, \psi_k \, d\tau$$

$$= \frac{-e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2 \epsilon_o \omega}} \cdot \vec{i}_A \left\{ \left\langle \ell \left| e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, p \right| k \right\rangle e^{-i\omega t} + e^{-\vec{k}\cdot\vec{r}}\, p\, k \; e^{i\omega t} \right\} \quad (6.40)$$

وحيث ان هاميلتونية التفاعل (هاميلتونية الاقلاق) " $\hat{H}^{(1)}$ " تتميز هنا بانهـا دورية فى الزمن (بتردد زاوى ω) هذا يعنى ان الحد الذى يشمـل " $\exp(-i\omega t)$ " يقابل اكتساب المجموعة لطاقة أى أن الفوتون حدث له امتصاص بينما الحد الذى يشمل " $\exp(i\omega t)$ " يقابل فقدها لطاقة أى انبعـاث فوتون . اذاً نستطيع ان نُعبر عن عنصر المصفوفة المقابلة لانبعاث الفوتون كما يلى :

$$\left\langle \vec{k}\ell \left| \hat{H}^{(1)} \right| k \right\rangle = -\sqrt{\frac{e^2}{4\pi \epsilon_o}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}} \left\langle \ell \left| \vec{i}_A \cdot \vec{p} \cdot e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right| k \right\rangle \quad (6.41)$$

بينما عنصر المصفوفة المقابلة لامتصاص الفوتون هو :

$$\left\langle \ell \left| \hat{H}^{(1)} \right| \vec{k} \quad k \right\rangle = -\sqrt{\frac{e}{4\pi \epsilon_o}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}} \left\langle \ell \left| \vec{i}_A \cdot \vec{p} \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right| k \right\rangle \quad (6.42)$$

وفى حالة ما اذا كان الطول الموجى λ للاشعاع اكبر بكثير من قطرة الـذرة (مثلا اذا كان " $\lambda = 10^{-7} m$ " بينما " $k \sim 10^{-10}\ m$ " اذاً " $\vec{k}\cdot\vec{r} \sim 10^{-3}$ ") فان " $\exp(\pm i\vec{k}\cdot\vec{r}) \sim 1$ " ومعنى ذلك ان عنصرى مصفوفة التفاعل تكونـا متساويين فى المعادلتين (6.41) و (6.42) . ويصبح حساب اى منهما سهـلا نسبيا . فاذا ماتذكرنا ان :

$$p = \frac{m}{i\hbar} \left[r, H^{(o)} \right] = \frac{m}{i\hbar} \left(r H^{(o)} - H^{(o)} r \right) \quad (6.43)$$

ورأينا عاليه ان :

$$\langle \ell | H^{(1)} | \vec{k}\ k \rangle = \langle k\ell | H^{(1)} | k \rangle = -\frac{e}{m}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_o}}\ \langle \ell | \vec{i}_A \cdot \vec{p} | k \rangle$$

$$= -\frac{e}{m}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_o}} \cdot \vec{i}_A \cdot \langle \ell | p | k \rangle \quad (6.44)$$

وباستخدام (6.43) وملاحظة ان $\langle k |$ و $| \ell \rangle$ حالات ايجينيــــة للهاميلتونية $\hat{H}^{(o)}$ نجد ان :

$$\langle \ell | \hat{p} | k \rangle = \frac{m}{i\hbar}\langle \ell | r\ \hat{H}^{(o)} - \hat{H}^{(o)}\ r | k \rangle$$

$$= \frac{m}{i\hbar}\left[E_k \langle \ell | \hat{r} | k \rangle - E_\ell \langle \ell | \hat{r} | k \rangle \right]$$

$$= \frac{m}{i\hbar}(E_k - E_\ell)\langle \ell | \hat{r} | k \rangle$$

$$= \frac{im}{\hbar}(E_\ell - E_k)\langle \ell | \hat{r} | k \rangle$$

$$= im \cdot \frac{E_\ell - E_k}{\hbar} \cdot \langle \ell | \hat{r} | k \rangle \quad (6.45)$$

وبوضع " $\omega_{\ell k} = (E_\ell - E_k)/\hbar$ "

$$\therefore \langle \ell | \hat{p} | k \rangle = \pm\, i\, m\ \omega_{\ell k} \langle \ell | \hat{r} | k \rangle \quad (6.46)$$

حيث العلامة + تستخدم فى حالة امتصاص الاشعاع $(E_\ell > E_k)$.

$$\therefore \langle \ell | \hat{H}^{(1)} | \vec{k}\ \ k \rangle = \langle \vec{k}\ell | \hat{H}^{(1)} | k \rangle$$

$$= \pm \frac{ie}{m} \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_o}} \cdot m\,\omega_{\ell k} \cdot \vec{i}_A \langle \ell | \hat{r} | k \rangle \quad (6.4$$

والان نستطيع حساب معدل اشعاع " المزدوج الكهربـــــى (Electric Dipole Radiation) تبعا للتقريب الموضح بمعادلة (6.47) - هذا الاسم يضـــاف للاشعاع الحالى بسبب ان $\langle er \rangle$ تمثل كما هو معروف فى اساسيات علـــــــم الكهروديناميكا " عزم المزدوج الكهربى " • ولاتمام ذلك نبدا من علاقة القاعدة الذهبية التى توضحها معادلة (6.26) :

$$\frac{\partial P^{\ell}(t)}{\partial t} = \frac{2\pi}{\hbar} k \left| \langle \ell \left| H^{(1)} \right| k \rangle \right|^2 \rho(E) \qquad (6.26)$$

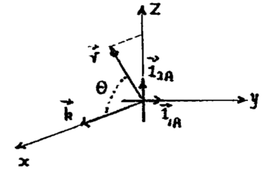
وفيها كثافة الحالات النهائية عبارة عن :

$$\rho(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{dn}{dp}\frac{dp}{dE} = \frac{\Omega' \cdot p^2 \cdot d}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{\Omega' \, E^2}{(2\pi\hbar\, c)^3}\, d\Omega \qquad (6.48)$$

حيث $d\Omega$ عنصر الزاوية المجسمة المتجهة خلالها (فى اتجاه $\vec{k}$) الحـــالات التى يتم تحديد عددها (كل فوتون يقابل واحدة من الحالات لان اتجاه الفوتـــون يعاكس تماما اتجاه ارتداد المتذبذب) "$E = \hbar\omega$"

$$\therefore \frac{\partial P^{\ell}(t)}{\partial t} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\omega^2\Omega'}{2\pi\hbar\, c^3}\left| \langle \ell \left| \vec{1}_A \cdot \vec{r} \right| k \rangle \right|^2 d\Omega \qquad (6.49)$$

" الشكل يوضح العلاقة بين المتجــه $\vec{r}$ والمتجه $\vec{k}$ كذلك بين اتجاهـــى استقطاب الاشعاع الكهرومغناطيســى $\vec{1}_{1A}$ و $\vec{1}_{2A}$ "



والان لحساب عمر الانتقال الاشعاعى $\tau_{\ell k}$ من k الى ℓ يجـــب ان نقوم بعملية جمع على الحالات المستقلة للاستقطاب $\vec{1}_{1A}$ و $\vec{1}_{2A}$ ونُجرى عمليـــة التكامل على كل الاتجاهات (ولهذا الغرض يفترض ان الاتجاهات $\vec{k}$ و $\vec{1}_{1A}$ و $\vec{1}_{2A}$

" ثابتة " . ولدينا :

$$\langle \ell | \vec{i}_A \cdot \vec{r} | k \rangle = \vec{i}_A \cdot \langle \ell | \vec{r} | k \rangle = \vec{i}_A \cdot \vec{M} \qquad (6.50)$$

ويكون المجموع الذى نبغيه بالنسبة لاتجاهى الاستقطاب هو (مع ملاحظة ان اتجاه $\vec{k}$ اختيارى وقد اعتبرناه موازيا للمحور x) :

$$\sum |\vec{i}_A \cdot M|^2 = |\vec{i}_{1A} \cdot \vec{M}|^2 + |\vec{i}_{2A} \cdot \vec{M}|^2 = |M_y|^2 + |M_z|^2$$

$$= |M_y|^2 + |M_z|^2 + |M_x|^2 - |M_x|^2$$

$$= |M|^2 - \frac{|k \cdot M|^2}{k^2} = |M|^2 - \frac{k^2 |M|^2 \cos^2\theta}{k^2}$$

$$= |M|^2 \sin^2\theta \qquad (6.51)$$

$$\therefore \sum |\langle \ell | \vec{i}_A \cdot \vec{r} | k \rangle|^2 = |\langle \ell | \vec{r} | k \rangle|^2 \sin^2\theta \qquad (6.52)$$

(وهنا نشير الى ان :

$$|\langle \ell | r | k \rangle|^2 = |\langle \ell | x | k \rangle|^2 + |\langle \ell | y | k \rangle|^2 + |\langle \ell | z | k \rangle|^2$$

$$\therefore \frac{\partial P^{\ell}(t)}{\partial t} = \frac{e^2 \omega^3}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle \ell | \vec{r} | k \rangle|^2 \sin^2\theta \, d\Omega \qquad (6.53)$$

وباجراء التكامل على كل الزوايا نحصل على احتمالية الانتقال الكلية فى وحدة الزمن :

$$P = \frac{e^2 \omega^3}{3\pi \epsilon_0 c^3} |\langle \ell | r | k \rangle|^2 \qquad (6.54)$$

والان نشير الى انه اذا افترضنا ان المجموعة اساسا موجودة فى حالة مضطربة " k " فانه بعد مرور فترة زمنية وجيزة فان احتمالية " $P_k(t)$ " انها لاتـــزال

موجودة تنقص عن قيمة الوحدة التى كانت عليها عند البداية . واحتمالية انها تتآكـــل بديهى انها تتناسب طرديا مع " $P_k(t)$ " ونعبر عن ذلك كما يلى :

$$\frac{\partial P_k}{\partial t} = -P \cdot P_k \qquad (6.55)$$

$$\therefore \quad P_k(t) = P_k(0) \cdot e^{-P \cdot t} \qquad (6.56)$$

ومن هذه العلاقة يتضح لنا أن P تُمثل ثابت التآكل للحالة الكمية $|k\rangle$

اى ان " $\frac{e^2 \omega^3 \langle \ell | r | k \rangle^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3} =$ " تمثل ثابت التآكل للحالة المضطربة .

ويكون مقلوب هذه الكمية عبارة عن مقياس لعمر تآكلها $\tau_{\ell k}$.

قواعد الاختيار عند الانتقال من حالة الى اخرى بالنسبة لتفاعل المتذبذب مع الاشعاع :

كما اشرنا فى الشكل السابق لنفرض ان المتذبذب يتحرك فى اتجاه المحـــور x وعليه فبدلا من $\langle \ell | r | k \rangle^2$ يختزل الى $\langle \ell | x | k \rangle^2$.

وبما ان (راجع صفحة -٤- معادلة (1.14)) :

$$\langle \ell | x | k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\ell^* \, x \, \psi_k \, dx = x_{\ell k}$$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2 m \omega}} (\hat{a} + \hat{\bar{a}})$$

$$\therefore x_{\ell k} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\ell \left\{ \sqrt{\frac{\hbar}{2 m \omega}} (\hat{a} + \hat{\bar{a}}) \psi_k \right\} dx$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_l \, (a\psi_k + \bar{a}\,\psi_k)\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_l \, (\sqrt{k}\,\psi_{k-1} + \sqrt{k+1}\,\psi_{k+1})\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left\{ \sqrt{k}\,\delta_{l,k-1} + \sqrt{k+1}\,\delta_{l,k+1} \right\} \qquad (6.57)$$

وهذه النتيجة تعطينا قاعدة الاختيار في الانتقالات الخاصة بالمتذبذب التوافقي (الذرات الضطرية) اذ أن الطرف الايمن من المعادلة يصير صفرا الا اذا كان $l = k \pm 1$ • اى ان انبعاث الاشعاع يستدعى :

$$\Delta l = -1$$

بينما امتصاص الاشعاع يستدعى :

$$\Delta l = +1$$

بمعنى ان هذه الانتقالات المسموح بها هى تلك التى يتغير فيها عدد الكم بمقدار الوحدة •

مثال محلول (٦-٤):

استنتج التعبير الرياضي للهاميلتونية التي تقابل حركة الكترون (بسرعة $\vec{v}$) في مجال مغناطيسي شدة فيضه $\vec{B}$ • بجانب مجال كهربي •

الحـــل :

نتذكر من اساسيات الكهرومغناطيسية ان مثل هذه الشحنة e تتاثر بقـــوة لورنتز $\vec{F}$ حيث :

$$\vec{F} = e\left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right]$$

وكالمعتاد $\vec{E}$ عبارة عن متجه شدة المجال الكهربي • والمتجهان $\vec{E}$ و $\vec{B}$ تحققان علاقات ماكسويل الكهروديناميكية :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu\vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

والمعادلة الاولى منها يمكن التعبير عنها بدلالة مايعرف بمتجه الجهد " $\vec{A}$ " حيث $B = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ على النحو التالي :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$$

واذا رمزنا للمجموع $(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$ بالرمز $\vec{\nabla}\phi$ - حيث ϕ يسمى بالجهـــد القياسي أي أن :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$$

يمكننا اعادة كتابة معادلة لورنتز بالصورة التالية :

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = e \quad (-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) + (\vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{A})$$

ولكن من قوانين تحليل المتجهات معروف ان :

$$(\vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{A})_x = v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$، \frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial x/\partial t} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y/\partial t} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z/\partial t}\right)$$

$$\therefore F_x = m\frac{d\,v_x}{dt} = -e\frac{d\phi}{dx} - e\frac{dA_x}{dt} + e\frac{\partial}{\partial x}(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

$$، \quad F_y = m\frac{d\,v_y}{dt} = -e\frac{d\phi}{dy} - e\frac{dA_y}{dt} + e\frac{\partial}{\partial y}(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

$$، \quad F_z = m\frac{d\,v_z}{dt} = -e\frac{d\phi}{dz} - e\frac{dA_z}{dt} + e\frac{\partial}{\partial z}(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

اى ان معادلة " $\vec{F}$ " تصبح بالصورة :

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v} + e\vec{A}) = \vec{\nabla}\left[-e\phi + e(\vec{v}\cdot\vec{A})\right]$$

وبوضع المعادلات عاليه على صورة اللاجرانجيان L (حيث " $q_3 = z$ و $q_1 = x$ و $q_2 = y$ ") :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j/\partial t}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

$$\therefore \quad L = \tfrac{1}{2} m\, \vec{v}\cdot\vec{v} - e\,\phi + e\vec{A}\cdot\vec{v}$$

$$, \quad p_x = \frac{\partial L}{\partial x/\partial t} = m\, v_x + e\, A_x$$

$$\therefore \quad H = \vec{p}\cdot\vec{v} + L$$

$$= p\cdot\left[\frac{1}{m}(\vec{p} - e\vec{A}) \quad - \tfrac{1}{2} m \quad \frac{1}{m}(\vec{p} - e\vec{A})\right]^2$$

$$+ e\phi - e\vec{A}\cdot \frac{1}{m}(\vec{p} - e\vec{A})$$

$$= \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - e\vec{A}\right]^2 + e\phi$$

(وهى نفس العلاقة التى بدأنا بها دراسة موضوع تفاعل الاشعاع مع الذرة او الالكترون كمتذبذب توافقى) اى ان الهاميلتونية التى تقابل حركة الكترون تحت تأثير مجال كهربى $\vec{E}$ ومجال مغناطيسى B هى :

$$H = \frac{1}{2m}\left[- i\hbar\nabla - e\, A\right]^2 + e\,\phi$$

حيث مفترضين ان v صغيرة بدرجة ملحوظة بالنسبة لسرعة الضوء c .

مثال محلول (٦-٥) :

جسيم كتلته m وشحنته الكهربية e يتميز بحركة مدارية تقابل عدد الكم ℓ وحركة مغزلية تقابل عدد الكم s استنتج التعبير الخاص بالعزم المغناطيسى μ_J الناتج من تقارن الحركتين المرتبطين بالعددين ℓ و s .

مثال محلول (٦-٦) :

استنتج التعبير الخاص بهاميلتونية تقارن الحركة المغزلية S للالكترون مع حركتـــه المدارية l .

الحـــل :

رأينا خلال دراستنا الحالية (راجع صفحة - ٥٧ -) أن الحركة المغزليـــة للجسيمات الاولية هى عموما نتيجة مرتبطة ارتباطا طبيعيا باساسيات النظرية النسبيـــة الخاصة لاينشتين . كذلك من نتائج هذه النظرية أن أى جسيم له شحنة كهربيـــة e يتحرك بسرعة مدارية $\vec{v}$ فى مجال كهربى $\vec{E}$ يتأثر بمجال مغناطيسى مكافـــى $\vec{B}_{rel}$ عبارة عن (وفى حالة الالكترون $-e$) :

$$\vec{B}_{rel} = -\vec{v} \times \vec{E}$$

وبالتالى فان العزم المغناطيسى $\vec{\mu}_s$ المرتبط بالحركة المغزلية للالكترون يتفاعـــل مع المجال المغناطيسى هذا حيث تمثل طاقة هذا التفاعل بهاميلتونية $\hat{H}_{SO}$ التزاوج بين حركة الالكترون المدارية وحركته المغزلية :

$$\hat{H}_{SO} = \vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_{rel} = \left(\frac{e}{2m} \vec{S} \right) \cdot \left(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{E} \right)$$

$$= \frac{e}{2m^2} \vec{S} \cdot (\vec{p} \times \vec{E})$$

وبما ان :

$$e\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\vec{r} \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right)$$

ومع تذكر ان الحركة المدارية تتميز بالعلاقة " $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ " .

$$\therefore \quad \hat{H}_{SO} = \left(\frac{1}{2m^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right) \vec{L} \cdot \vec{S}$$

وهو التعبير الخاص بهاميلتونية تقارن الحركة المغزلية للالكترون مع حركتـــــه المدارية . وهو شائع الاستخدام فى تحليل المشاهدات الخاصة بالاطياف الذريـــة ،

وكذلك في تطبيقات النموذج النووي الضوئي لتفسير المشاهدات التجريبية الخاصة بالتفاعلات النووية للجسيمات الاولية •

مثال محلول (٦-٧) :

اذا فرض أن " $\hat{H}_{spin} = -g\, e\ \vec{s}\cdot\vec{B}(t)/2\,mc$ " هي الهاملتونية الخاصة بالكترون يتحرك في مجال مغناطيسي منتظم $\vec{B}(t)$ – مع اهمال اى حركة مدارية له – وان $\vec{B}(t)$ في اتجاه محور $\vec{Z}$ تتميز بانها منتظمة ولاتعتمد على الزمن • اثبت ان متجه الحركة المغزلية يدور حول المحور $\vec{Z}$ بسرعة زاوية ω_o عبارة عن " $g\, e\, B_o / 2\,mc$ " •

الحل :

تبعا لما درسناه في الباب الاول وبتطبيق معادلة الحركة لهايزنبرج فان :

$$i\hbar \frac{d\,S_i}{dt} = \left[S_i(t),\ \hat{H}_{spin}(t)\right]$$

$$= -\frac{g\,e}{2\,mc} \sum \left[S_i(t)\ ,\ S_j(t)\right] B_j(t)$$

اى ان :

$$\frac{d\,S_x}{dt} = \frac{g\,e}{2\,mc}\left[\vec{S}\times\vec{B}(t)\right]_x$$

وعموما :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{g\,e}{2\,mc}\left[\vec{S}\times\vec{B}(t)\right] = \vec{\mu}_{spin}\times\vec{B}(t)$$

وحيث ان $\vec{B}$ في اتجاه محور $\vec{Z}$ منتظمة فرضا ولاتعتمد على الزمن :

$$\therefore\ \vec{B} = B_o\,\vec{z}$$

$$\therefore\ \frac{d\,S_x}{dt} = \frac{g\,e\,B_o}{2\,mc}\,S_y(t)$$

$$, \quad \frac{d\, S_y}{dt} = -\frac{g\, e\, B_o}{2\, mc}\, S_x(t)$$

$$, \quad \frac{d\, S_z}{dt} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d^2\, S_x}{dt^2} + \omega_o^2\, S_x = 0$$

$$, \quad \frac{d^2\, S_y}{dt^2} + \omega_o^2\, S_y = 0$$

حيث $\omega_o = g\, e\, B_o / 2\, mc$ • وحلول تلك المعادلات التفاضليـــــة هى :

$$S_x(t) = S_x(0)\, \cos\, \omega_o t + S_y(t)\, \sin\, \omega_o t$$

$$S_y(t) = -S_x(0)\, \sin\, \omega_o t + S_y(0)\, \cos\, \omega_o t$$

$$S_z(t) = S_z(0)$$

فاذا فرض ان عند $t = 0$ كان متجه الحركة المغزلية فى اتجاه محور x أى أن الالكترون عند تلك اللحظة كان فى حالة ايجينية S_x منتمية لقيمة أيجينية $+ \frac{1}{2} h$ اى ان القيم المتوقعه لمركبات S عند اللحظة $t = 0$ هى :

$$\left\langle S_x(0) \right\rangle = \tfrac{1}{2}\hbar$$

$$\left\langle S_y(0) \right\rangle = 0$$

$$\left\langle S_z(0) \right\rangle = 0$$

وعند اللحظة $t = t$ هى :

$$S_x(t) = \frac{1}{2}\hbar \cos \omega_0 t$$

$$S_y(t) = -\frac{1}{2}\hbar \sin \omega_0 t$$

$$S_z(t) = 0$$

وتوضح المعادلات ان تلك القيم المتوقعة للحركة المغزلية تدور • علاوة على ذلـــــك فان الحالة الكمية الخاصة بالحركة المغزلية تتطور مع الزمن كما يلى :

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\omega_0 t\, S_z}\,|\psi(0)\rangle$$

اى ان متجه الحركة المغزلية يدور حول محور S_z بسرعة زاوية ω_0 •

بسم الله الرحمن الرحيم

الباب السابع

معالجة ظاهرة الاستطارة فى اطار ميكانيكا الكم دون ذكر لتغيير الزمن

"Quantum Mechanical Treatment of the Scattering Problem Without Time Consideration"

عند تعرض اثنين (أو اكثر) من الجسيمات الى قوة تبادلية (mutual force) يكون فى استطاعتهما التصادم مع بعضهما • وبهذا المفهوم فان هذا التصادم يوءدى الى ان التفاعل بينهما يوءثر على سرعة كل من الجسيمين مقدارا او اتجاها او كليهما معا وربما فى كثير من الاحيان على التركيب الداخلى لكل منهما •

هذه الظاهرة هى مايقصد به مفهوم الاستطارة ولقد أدت الى إثراء فَهْمِنا لبعض خصائص المادة والطاقة فعلى سبيل المثال :

- استطارة الاشعاع الضوئى اثناء مروره فى المواد المتباينة كان السبب فى التعرف على حقيقة ان الاشعاع الضوئى جزء يسير من الطيف الكامل للاشعاع الكهرومغناطيسى وانه يتميز بخاصيته الموجية المستعرضة • بجانب ماتم التعرف عليه من حقيقة انه يتميز فى نفس الوقت بالخاصية الجسيمية كما اثبت ذلك استطارة الاشعة السينية (كجزء آخر من نفس الطيف الكهرومغناطيسى) بواسطة الالكترونات المهمل ترابطها مع ذراتها الأم •
- استطارة الاشعاعات السينية بواسطة بلورات المواد الجامدة ادت الى فهم العديد من خصائص التركيب البلورى لكثير من تلك المواد • ٥

- استطارة الاشعاعات الالكترونية ودراسة مايعرف بالمقطع المستعرض لالتقاط تلك الاشعاعات بواسطة الاغشية الرقيقة من المواد الجامدة اشباه الموصلات كان لها الأثر الكبير في تطوير تصنيع الدوائر المتكاملة ("IC"- Integrated Circuits) الخاصة بتكنولوجيا الحاسبات حتى تتسع لتخزين ملايين المعلومات على نفس الدائرة الواحدة • كذلك فان مثل هذه الدراسات ادت الى اختراع الميكروسكوب النفقي القادر على توضيح التركيب السطحي للمواد الجامدة (تم هذا الاختراع عام ١٩٨٦ بواسطة بينيج وردهرر) •

- استطارة الاشعاعات النووية على اختلاف طبيعتها (بروتونية • نيوترونية • ميزونية • فوتونية • اشعاع جاما •••) واختلاف طاقتها (ابتداء من اقل من الالكترون فولت الى " مليون بليون " الكترون فولت) ادت الى فهم العديد من الصفات التى تتميز بها النواه الذرية من ناحية التركيب الدقيق لها وكتلتها وشحنتها الكهربية وحركتها المغزلية وحركتها المغزلية النظيرية •

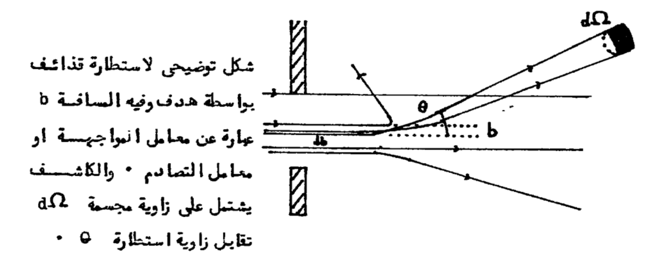
- استطارة الاشعاعات الكونية على اختلاف نوعيتها (ميونية • بيونية • نيوكليونية • انوية خفيفة • انوية متوسطة الكتل • انوية ثقيلة الكتل • انوية كتلها اكثر ثقلا • اشعة جاما • اشعة الكترونية • اشعة بوزيترونية • جسيمات النيوترينو) ادت الى عدة اكتشافات هامة في مجال فيزياء الفضاء Astrophysics وفي مجال فيزياء البيئة •

ولو أن الامثلة التى أُسردت عاليه يتصف كل منها بخصائص مميزة لكل منها الا ان الاساسيات العامة الخاصة بظاهرة الاستطارة واحدة وتختلف فقط في التفاصيل الرياضية المبنية على هذه الاساسيات • ولنبدا الآن بمناقشة تلك الاساسيات قبل عرض موجز لبعض من تلك الامثلة •

مفهوم المقطع المستعرض للاستطـــارة :

من الناحية المعملية فان دراسة الاستطارة تستدعى تواجد حزمة مجمعة مـــن القذائف Projectiles) تتميز بطاقة محددة (فى بعض الاحيان يكون الباحـــث الذى يُجرى التجربة على علم بالحالة الاستقطابية الخاصة بتلك القذائف وفى تلـــك الاحيان يكون الناتج من القياسات له وَفْرَه علمية اكثر مما لو كانت غير مستقطبـــة) • هذه القذائف تُوَجَّه الى هدف (Target) ذرى حيث لها استطارة من جراء تفاعلهـا مع أنوية والكترونات هذا الهدف • ويتم الكشف عن الجسيمات الناتجة من هـــذه الاستطارة بواسطة كاشف مناسب تبعا للتجربة المعنية (قد يكون هذا الكاشف علـــى سبيل المثال مستحلب نووى ــ كاشف وميضى ــ غرفة شرارة ــ مضاعف الكترونى ٠٠٠٠) •

واكثر معامل فيزيائى يلخص نتائج مثل هذه التجارب هو مايعرف بالمقطـــع المستعرض للاستطارة(Scattering Cross Section) وقد اختير تعريفه حتـــى يتلاءم مع الفكرة التقليدية لتصادم جسيمين :



شكل توضيحى لاستطارة قذائف بواسطة هدف وفيه المسافة b عبارة عن معامل انواجهـة او معامل التصادم • والكاشـف يشتمل على زاوية مجسمة dΩ تقابل زاوية استطارة θ •

واذا افترضنا ان :

شدة حزمة القذائف المُوَجَّهة للهدف (لكل وحدة مساحة فى الثانية) = I

عدد الجسيمات المستطارة بزاوية θ التى يسجلها الكاشف فى كل ثانية = N

المساحة الفعالة للكاشف المُوَجَّهه تجاه القذائف المستطـارة = A

$$\therefore \quad N = I \cdot A \qquad (7.1)$$

وتجدر الاشارة هنا الى ان كلا من N و I و A يُنظر لها بمفهوم إحصائى إذ أن عدد القذائف الذى يصل الى الهدف يتم له ذلك بطريقة عشوائية تماما اذ انه من المستحيل معرفة فى اى لحظة اى منها يصل الى هذا الهدف . من ناحية اخرى فان الكاشف يسجل عددا متوسطا ولا يستطيع تسجيل عددا بذاته .

بعد ذلك يلاحظ ان اى من جسيمات القذائف القادمة فى اتجاه محور مشترك (وليكن المحور $\vec{z}$) على بعد مستعرض b من مركز الهدف سوف يحدث له " فرضا " استطارة بزاوية Θ .

وعلى ذلك فان عدد الجسيمات " $dN(\Theta)$ " التى يحدث لها استطارة بزوايا بين " Θ و $\Theta + d\Theta$ " هى التى كانت لها مساحة مقطع " $d\sigma$ " تجاه الكاشف

$$dN(\Theta) = I \cdot b \cdot db \cdot d\phi \qquad (7.2)$$

حيث $d\phi$ عنصر زاوية السمت التى تقابل اتساع الكاشف بمواجهة القذائف المستطارة .

$$\therefore \quad \frac{dN(\Theta)}{I} = b \cdot db \cdot d\phi = d\sigma \qquad (7.3)$$

بينما عنصر الزاوية المجسمة " $d\Omega$ " عبارة عن :

$$d\Omega = \sin\Theta \cdot d\Theta \cdot d\phi$$

ويلاحظ ان $d\sigma$ تعتمد بصفة عامة على طاقة الجسيمات القذائف بجانب اعتمادها على زاوية الاستطارة Θ . كذلك $dN(\Theta)$ يتناسب طرديا مع الزاوية المجسمة $d\Omega$ التى تواجه الهدف . لذلك تقاس النسبة " $d\sigma / d\Omega$ " بدلا من " $d\sigma$ " حتى يكون نتيجة القياسات التجريبية مستقل عن الزاوية المجسمة

بينما المقطع المستعرض التفاضلي في المجموعتين مرتبطان بالعلاقة التالية

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}\right]_L = \left[\frac{d\sigma}{d\Omega}\right]_c \cdot \frac{d\ (\cos\theta_c)}{d\ (\cos\theta_L)}$$

$$= \left[\frac{d\sigma}{d\Omega}\right]_c \cdot \left\{ \frac{\left[\sqrt{1-\frac{m^2 \cdot \sin^2\theta_L}{M^2}} + \frac{m \cdot \cos\theta_L}{M}\right]^2}{\sqrt{1-\frac{m^2\sin^2\theta_L}{M^2}}} \right\} \quad (7.5)$$

اذ ان :

$$\cos\theta_L = \frac{\frac{m}{M}\cos\theta_c}{\sqrt{1+\frac{2m}{M}\cos\theta_c+\frac{m^2}{M^2}}} \quad (7.6)$$

$$،\ \cos\theta_c = \cos\theta_L\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}\sin^2\theta_L} - \frac{m}{M}\sin^2\theta_L \quad (7.7)$$

والآن نبدأ المعالجة الكمية للاستطارة ، وأول مثال لذلك هو أبسطها فيزيائيا وهو الخاص بالاستطارة المرنة "Elastic Scattering" ويُقصد بها تلك التي لايصاحبها اي تغير في طاقة الحركة •

الاستطارة المرنة في اطار ميكانيكا الكم دون ذكر احداثي الزمن :

تبدا المعالجة الكمية للاستطارة المرنة بفكرة تمثيل الجسيم القذيفه بموجه مستويه " ψ_i " حيث يرمز i إلى ان القذيفة في حالتها الكمية الاصلية "initial quantum state" قادمة في اتجاه موازى لمحور الاحداثي z :

$$\psi_i = \sqrt{\frac{A_i}{v}}\ e^{i(kz-\omega t)} \quad (7.8)$$

حيث :

شدة الفيض للجسيمات القذائف القادمة تجاه الهدف $A_i =$

سرعة القذائـــف $v =$

كمية التحرك الخطى للقذائف $k\hbar =$

هذه الموجات المستوية سوف تتعرض لاستطارة من نوع معين نتيجة جهد التفاعل $\hat{V}(r)$ الذى يتميز به مركز الاستطارة (الجسيم الهدف) • معنى ذلك انه بجانب الموجات القادمة تجاه الهدف يكون هناك موجات منتشرة بعيدا عن الهدف تُمثّل بموجات كريـــه تنقص تدريجيا من شدتها كلما بعدت عن مركز الاستطارة التى بدأت منه • أى أن الحالة النهائية ψ_f تُمثل بالمجموع التالى :

$$\psi_f \underset{r\to\infty}{\sim} \psi_i + \psi_s \qquad (7.9)$$

حيث ψ_s تمثل الموجات الكريه الناتجة عن الاستطارة التى أشرنا اليها ونعبـــر عنها كما يلى (راجع مثال محلول) :

$$\psi_s = f(\theta)\,\frac{e^{ik\cdot r}}{r} \qquad (7.10)$$

ويجب ان تكون كل من الموجات القادمة ψ_i والموجات المنتشرة خارج مركـــز الاستطارة ψ_f (المكونة من الموجات المستوية المتناقصة والموجات الكريه ψ_s) تمثل حلول لمعادلة شرودنجر بصورتها العامة :

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar}\left(E - V(r)\right)\psi = 0 \qquad (7.11)$$

ونود ان نشير هنا الى ان المسألة التى نحن بصددها تختلف رياضيا عن ما درسنـــاه فى ميكانيكا الكم قبل ذلك فى حالة حل معادلة شرودنجر لمستويات محددة لحالة كميـة مرتبطة (Bound Quantum State) إذ ان فى تلك المسائل السابقة كُنا نبحث عن حل لمعادلة شرودنجر التى احتوت على معامل طاقة غير معروف ومن ثم توصلنا لقيـم الطاقة المسموح بها والدوال الايجينية المنتمية لها بتحقيق الشروط الحدية وشـــرط ان دالة الحالة طيبة السلوك •

أما فى مسائل الاستطارة فان معامل الطاقة فى معادلة شرودنجر معروف لدينا من البداية (لأن الجزء E محدد من ظروف التجربة بينما الجزء V نضع قيم افتراضيه له (من الامثلة الشائعة لذلك تطبيقات النموذج النووى الضوئى (Nuclear Optical Model) • والمسألة تتلخص فى ايجاد حلول لمعادلة شرودنجر والتى تتميز بصور معينة عند مسافات كبيرة من مركز الاستطارة مثل التى اشرنا اليها فى معادلتى (7.8) و (7.9) و (7.10) • وفى الحقيقة معادلة (7.9) فى صورتها هذه :

$$\psi_f(\vec{r}) \underset{r \to \infty}{\sim} e^{ikz} + Af(\theta,\phi) \frac{e^{ik \cdot r}}{r} \qquad (7.12)$$

تُعتبر احد الشروط الحدية فى مسائل الاستطارة • بجانب ذلك يجب ان لاننسى ان ψ تتصف بالاستمرارية وعلى وجه الخصوص عند مركز الاستطارة •

العلاقة بين سعة الاستطارة " f " والمقطع المستعرض للاستطارة " σ " :

فى معادلة (7.12) " $Af(\theta,\phi)$ " ترمز لسعة الموجه المستطارة وواضح انها تعتمد على الاتجاه (θ,ϕ) الذى حدثت فيه الاستطارة • ولقد أدخل المعامل " $1/r$ " لأن كثافة احتمال الاستطارة " P_s " فى اى اتجاه تتقص تبعا لقانون التربيع العكسى مثل " $1/r^2$ " مع ملاحظة ان الطول الموجى للجسيمات المستطارة λ او $\lambda\!\!\!^{-}$ تختلف عن تلك للجسيمات القذائف (الا فى حالة الاستطارة المرنة فتكون هى نفسها) •

والآن بتطبيق معنى احتمال تواجد اى جسيم تبعا لاساسيات ميكانيكا الكم نلاحظ ان:

احتمالية أن نجد أى جسيم قذيفة قادم فى اى عنصر حجمى $d\tau$ من الحزمة الساقطة = $P_i \, d\tau$ =

تجاه الهدف

$$= \psi_i^* \, \psi_i \, d\tau = A^* A \, d\tau = A^* A \, dx \, dy \, dz \qquad (7.13)$$

وهذا الاحتمال ينساب مسافة dz (تذكر ان الجسيمات القذائف قادمة فى اتجــاه موحد موازى للمحور z) خلال المساحة " $dx.dy$ " فى الزمــــــن " $dt = dz/v$ " ، اذا تيار الاحتمال المخترق وحدة المساحات (اى كثافــة الفيض القادم) هو :

$$\frac{P_i \, d\tau}{dx.dy.dt} = v \, A^* A$$

وبالمثل احتمال ان نجد جسيم مُستطار فى عنصر حجمى $d\tau'$ حيث $d\tau'$

$$d\tau' = r^2 \cdot \sin\theta \cdot d\phi \, d\theta \, dr = r^2 \, d\Omega \, dr \qquad (7.14)$$

عبارة عن :

$$P_s \, d\tau' = \psi_s^* \psi_s \, d\tau'$$

$$= A^* A \cdot f^*(\theta,\phi) \, f(\theta,\phi) \cdot \frac{r^2}{r^2} \cdot d\Omega \cdot dr$$

$$\therefore \; P_s \, d\tau' = A^* A \cdot f^*(\theta,\phi) \, f(\theta,\phi) \, d\Omega \, dr \qquad (7.15)$$

وعلى ذلك فان تيار الاحتمال عند النقطة (r, θ, ϕ) الناتجة عــــــن الجسيمات المستطارة التى تتحرك قطريا (radially) بسرعة v خلال عنصــر الزاوية المجسمة $d\Omega$ هى :

$$\frac{P_s \, d\tau'}{dt} = v . A^* A \; f^*(\theta,\phi) \, f(\theta,\phi) \, d\Omega$$

ومن تعريف المقطع المستعرض $\sigma(\theta , \phi)$ للاستطارة على النحو التالى :

$$\sigma(\theta,\phi) = \frac{d\Omega \text{ تيار الاحتمال للجسيمات المستطارة فى زاوية مجسمة }}{\text{كثافة تيار الاحتمال للقذائف القادمة}} \qquad (7.16)$$

نحصل على العلاقة التى تربط بين سعة الاستطارة والمقطع المستعرض :

$$\sigma(\theta,\phi) = f^{*}(\theta,\phi)\, f(\theta,\phi) = \left| f(\theta,\phi) \right|^{2} \qquad (7.17)$$

المعالجة الكمية للاستطارة المرنـــة :

هذه المعالجة مبنية على تحقيق الشرط الذى جاء بمعادلة (7.12) والذى ينص على ان الدالة الموجية التى تمثل حل معادلة شرودنجر عند المسافات البعيـــدة عن مركز الاستطارة تأخذ الصورة التالية (لاحظ ان تاثير الجهد V يصبح عنـــد تلك المسافات مُهمَلا) :

$$\psi(r,\theta,\phi) = e^{ikr\cos\theta} + \frac{1}{r} f(\theta) \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad (7.18)$$

(وضع A يساوى الوحدة لايؤثر على النتائج) .

اذًا الموجه المستطارة " $\frac{1}{r} f(\theta)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ " عبارة عن :

$$\frac{1}{r} f(\theta) \cdot e^{ik\cdot r} = \psi(r,\theta,\phi) - e^{ik\cdot r\cos\theta}$$

$$\therefore f(\theta) = \underset{r\to\infty}{\text{Limit}} \left\{ \psi(r,\theta,\phi) - e^{ikr\cos\theta} \right\} r\cdot e^{-ik\cdot r} \qquad (7.19)$$

وبسبب ان الحل الصحيح لمعادلة شرودنجر يمكن ان يتم فقط فى بعض الحالات القليلة العدد اذًا علينا ان نستخدم طرق تقريبية تعتمد بصورة اساسية على طبيعة الجِهـــد الجُهدى الذى يُعْزَى له حدوث الاستطارة وكذلك تعتمد على النسبة بين طاقة الوضع للجسيمات القذائف وطاقة الحركة لها . وكمثال لذلك لندرس الطريقة المسماه :

طريقة الموجات الجزئية (Partial-Wave Method)

اساس هذه الطريقة يعود للدراسة الكلاسيكية للحركة الموجية الصوتية التـــــي أوضحها العالم الانجليزي لورد كِلفن (Lord Kelvin) وهي تعتمد على العلاقتين التاليتين :

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\Theta}$$

$$= \frac{1}{kr}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1).e^{\frac{i\pi\ell}{2}}.P_{\ell}(\cos\Theta).J_{\ell}(kr) = \psi_i \qquad (7.20)$$

$$6\left\{e^{ikr\cos\Theta} + \frac{1}{r}f(\Theta).e^{ikr}\right\} =$$

$$= \frac{1}{kr}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1).e^{\frac{i\pi\ell}{2}}.P_{\ell}(\cos\Theta).G_{\ell}(kr)$$

$$= \psi(r,\Theta,\phi) \qquad (7.21)$$

حيث :

الموجه القادمة تجاه مركز الاستطارة $= e^{ikz} = \psi_i$

الموجه المنطلقه بعيدا عن مركز الاستطارة في زاوية مجسمة " d"$=(r,\Theta,\phi)\ \psi$

العدد الموجي = $k = \frac{p}{\hbar}$ وزاوية الاستطارة $= \Theta$

كمية التحرك الخطي للجسيمات القذائف $= p$

عدد الكم للموجه الجزئية التي تتكون من مجموعها "الموجه المنطلقة بعيدا عن مركز الاستطارة $\psi(r,\Theta,\phi)$" وهذا العدد مرتبط بالحركة الزاوية المدارية. $= \ell$

متعددة الحـــــدود (Legendre Polynomial) لليجانـدر $= P_{\ell}(\cos\Theta)$

$J_l(kr)$ = دالة بسل (Bessel Function) المقابلة للموجه الجزئية
المتميزة بعدد الكم l قبل تاثرها بالتفاعل

$G_l(kr)$ = دالة بسل المقابلة للموجه الجزئية المتميزة بعدد الكم l بَعْد
تاثرها بالتفاعل نتيجة $\hat{V}$ • وهذه الدالة هى حل للمعادلة
القطرية مُعبَّر عنها بكميات ليس لها ابعاد :

$$G_l'' + \left[\epsilon_k^2 + \epsilon^2(\rho) - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] G_l = 0 \qquad (7.22)$$

حيث :

$a =$ ثابت ، $\rho = \frac{r}{a}$,

معامل الطاقة الكلية $\epsilon_k = ka =$

معامل طاقة الوضع $\epsilon(\rho) = \sqrt{-\frac{V}{E}}$

وبالتعويض من معادلتى (7.20) و (7.21) فى (7.19) ومع بعض المعالجـــة
الجبرية (راجع مثال محلول ٧-٢) نصل الى أن :

$$f(\theta,\phi) = \frac{1}{k} \sum (2l+1)\, P_l(\cos\theta)\, e^{i\delta^l} \sin\delta^l \qquad (7.23)$$

$$\therefore \quad \sigma(\theta,\phi) = \chi^2 \left| \sum (2l+1)\, P_l(\cos\theta)\, e^{i\delta^l} \sin\delta^l \right|^2 \qquad (7.24)$$

بينما المقطع المستعرض الكلى

$$\sigma_{tot} = \sigma = \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta) . P_{l'}(\cos\theta) . 2\pi \sin\theta \, d\theta$$

$$= 4\pi \chi^2 \sum (2l+1) \sin^2\delta^l \qquad (7.25)$$

حيث استفدنا من الخاصية التالية لمتعددة حدود ليجاندر :

$$\int_0^{\pi} P_{\ell}(\cos\theta) \cdot P_{\ell'}(\cos\theta) \cdot \sin\theta = \frac{2}{2\ell+1} \quad , \quad \ell = \ell' \qquad (7.26)$$

$$= 0 \qquad , \quad \ell \neq \ell'$$

معالجة الاستطارة بطريقة التغير (Variational Method)

طريقة التغير شائعة الاستخدام في عدة مجالات في الرياضيات الهندسية والفيزياء مثل استخدامها في حل المعادلات التفاضلية الجزئية وما يشبهها في مجال الفيزياء الجزيئية والذرية •

ولقد وُجد امكانية استخدامها في معالجة مسألة الاستطارة عندما تكون الطريقة الموجية الجزئية مناسب تطبيقها • وفيما يلي سوف نحاول تلخيص بعض ملامحها بالاسلوب الذي اوضحه العالمان هولثن وكون (Hulthen and Kohn) :
اذا ماحددنا في حيز هيلبرت لكل دالة " ψ " عدد " $E(\psi)$ " يُعَبِّر عن القيمة المتوقعة لطاقة المجموعة الفيزيائية التي نتحدث عنها بمعنى ان :

$$E(\psi) = \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \qquad (7.27)$$

فانه باستبدال الدالة " ψ " بدالة مجاورة " $\psi + \delta\psi$ " يتم الحصول على قيمة جديدة للطاقة " $E(\psi + \delta\psi)$ " • فاذا كانت " $\delta\psi$ " صغيرة بدرجة كافية يمكن حساب الفرق " $[E(\psi + \delta\psi)] - [E(\psi)]$ " بين قيمة الطاقة للرتبة الاولى من " $\delta\psi$ " وهذا يسمى بالتغير " $\delta E(\psi)$ " المقابل لتغير الدالة من " ψ " الى " $\psi + \delta\psi$ " • ولايجاده

نستفيد من معادلة (7.27) كما يلى :

$$E(\psi + \delta\psi) = \frac{\langle \psi + \delta\psi | \hat{H} | \psi + \delta\psi \rangle}{\langle \psi + \delta\psi | \psi + \delta\psi \rangle}$$

$$\cong \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle + \langle \delta\psi | \hat{H} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{H} | \delta\psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle + \langle \delta\psi | \psi \rangle + \langle \psi | \delta\psi \rangle} \quad (7.28)$$

وباستخدام نظرية ذات الحدين نجد ان الفرق بين قيمتى الطاقة هو :

$$E(\psi + \delta\psi) - E(\psi) = \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle + \langle \delta\psi | \hat{H} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{H} | \delta\psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \cdot \left[1 - \frac{\langle \delta\psi | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} - \frac{\langle \psi | \delta\psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} - \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \right]$$

$$\cong \frac{\langle \delta\psi | \hat{H} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{H} | \delta\psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} - \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle | \langle \delta\psi | \psi \rangle + \langle \psi | \delta\psi \rangle |}{|\langle \psi | \psi \rangle|^2}$$

وبما ان الحسابات يراد اتمامها للرتبة الاولى فى " $\delta\psi$ " ومع تذكر ان العاملة $\hat{H}$ هيرميتيه اذاً

$$\therefore \quad \delta E(\psi) = \frac{\langle \delta\psi | \hat{H} | \psi \rangle + \langle \hat{H}\psi | \delta\psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} - \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \langle \delta\psi | \psi \rangle + \langle \psi | \delta\psi \rangle}{|\langle \psi | \psi \rangle|^2} \quad (7.29)$$

ومن هذه المعادلة يتضح انه اذا كان " $\hat{H}\psi = E\psi$ " فـــان " $\delta E(\psi) = 0$ " وهذا معناه ان الحالات المرتبطـــة (Bound States) تتسبب فى اختفاء تغير دالة الطاقة • وفى الواقع تلك الحالات يمكـــن التوصل اليها باستخدام "دوال اختبارية" وليرمز لها بالرمز " ψ_t " وهـــذه

تعتمد على مجموعة محددة من المعاملات التي يمكن تسميتها
" $\lambda_1 \;,\; \lambda_2 \;,\; \lambda_3 , \ldots \lambda_\nu$ " بشرط انها تأخذ قيم مستقرة (لاتغير
فيها) اذا حققت العلاقة التالية :

$$\frac{\partial E(\psi_j)}{\partial \lambda_j} = 0 \quad , \quad j = 1,2,\ldots,\nu \tag{7.30}$$

ومن هذا ينتج مجموعة من المعادلات بعدد ν تتواجد معا في نفس الوقت وهذه
يمكن حلها لايجاد المعاملات $\lambda_1 \;,\; \lambda_2 \;, \ldots \lambda_\nu$ للحصول على دالة
موجيه تقريبية بينما الطاقة المقابلة تعطى بالدالة " $E(\psi_t)$ " .

وفيما يلي نحاول توضيح تطبيق هذه الطريقة لحساب ازاحة الطور " η "
الخاصة بالاستطارة لدرجة تقريبية مقبولة :

وللسهولة نفترض استطارة موجات جزئية ذات تماثل كرى اى تقابل عدد الكم
" $l = 0$ " وبذلك تاخذ المعادلة القطرية التي سبق الاشارة لها الصورة التالية
(حيث نشير هنا لجزء دالة الموجه بالرمز F) :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U(r) \right] F_o(r) = 0 \tag{7.31}$$

ومطلوب حلها في اطار الشرط الحدى التالي (راجع مثال محلول ٧ - ٢) :

$$F_l(r) \underset{r\to\infty}{\sim} A_l \sin(kr - \tfrac{1}{2} l\pi + \eta_l) \tag{7.32}$$

بمعنى ان :

$$F_o(r) \underset{r\to\infty}{\sim} A_o \sin(kr + \eta_o) \;,\; F_o(0) = 0 \tag{7.33}$$

والان لو اعتبرنا دالة $F(r)$ مناسبة تحقق مثل هذا الشرط الحدى الخاص
بالدالة $F_o(r)$:

$$F(r) \underset{r\to\infty}{\sim} A \sin(kr + \eta),\; F(0) = 0 \tag{7.34}$$

وكان اختيار هذه الدالة $F(r)$ بحيث يضمن ان التكامل التالي يقرب من التلاشي كلما بعدنا عن مركز الاستطارة :

$$\int_0^\infty F(r)\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U(r)\right] F(r)\, dr = I(F) \qquad (7.35)$$

فانه بتغيير تلك الدالة $F(r)$ الى دالة مجاورة " $^nF = F + \delta F$ " بحيث تحقق الشروط الحدية :

$$^nF = F + \delta F$$

$$\underset{r\to\infty}{\approx} (A + \delta F) \sin (kr + \eta + \delta n) \;,\; {}^nF(0) = 0 \qquad (7.36)$$

يكون في هذه الحالة التغير هو " $\delta I(F)$ " اى الفرق بين التكامل الخاص بالدالة F والتكامل الخاص بالدالة المجاورة ^nF أى أن التغير هو :

$$\delta I(F) = \int_0^\infty \delta F \left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U\right] F\, dr + \int_0^\infty F\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U\right] \delta F\, dr \qquad (7.37)$$

(قارن بين هذه المعادلة ومعادلة (7.29)) .

وبما ان :

$$\left(\frac{d}{dr}\right) \delta F = \left(\frac{d}{dr}\right) \left[{}^nF - F\right] = \frac{d\,{}^nF}{dr} - \frac{dF}{dr} = \delta \left(\frac{dF}{dr}\right) = \delta F'$$

$$\therefore \quad \delta I(F) = 2\int_0^\infty \delta F\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U\right] F\,dr$$

$$+ \left[F\,dF' - F'dF\right]_{r=o}^{r=\infty}$$

$$= 2\int_0^\infty \delta F\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U\right] F\,dr$$

$$+ \underset{r\to\infty}{\text{Limit}} \left\{ A\,(A + \delta A)\,k \left[\sin(kr + \eta)\cos(kr + \eta + \delta\eta)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \cos(kr + \eta)\sin(kr + \eta + \delta\eta)\right] \right\}$$

$$= 2\int_0^\infty \delta F\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U\right] F\,dr + \left\{-A(A + \delta A)\,k\,\sin\delta\eta\right\}$$

$$= 2\int_0^\infty \delta F\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U\right] F\,dr - A^2\,k\,\delta\eta \quad (7.38)$$

واذا كان " $F = F_o$ " نحصل على :

$$\delta I\,(F_o) = -A^2 . k . \delta\eta \qquad (7.39)$$

والان اذا تم تحديد نوعية الدوال التى يتم التخيير بالنسبة لها بحيث يشتـــــرط ان تكون " $A = \sec\eta$ " فان المعادلة

$$F(r) \underset{r\to\infty}{\sim} A\sin(kr + \eta)$$

$$\underset{r\to\infty}{\sim} A\sin kr . \cos\eta + A\cos kr\,\sin\eta$$

تصبح

$$F(r) \underset{r\to\infty}{\sim} \sin kr + \tan\eta \cos kr, \; F(o) = 0 \qquad (7.40)$$

في نفس الوقت نلاحظ انه اذا كان لدينا دالة اخرى $J(F)$ تســـــــاوى " $I(F) + k \tan\eta$ " فمعنى ذلك ان " $\delta J(F_o)$ " عبارة عن :

$$\delta J(F_o) = \delta\left[I(F_o)\; k \tan\eta\right] = \delta I(F_o) + k\; \delta(\tan\eta)$$

$$= \delta I(F_o) + k \sec^2\eta\; \delta\eta$$

$$= \delta I(F_o) + kA^2 \delta\eta$$

$$= -A^2 . k . \delta\eta + A^2 . k . \delta\eta$$

$$= \text{ZERO} \qquad (7.41)$$

$$\therefore \; J(F_o) = k \tan\eta_o \qquad (7.42)$$

وهذه النتيجة توضح ان الدالة الموجية " F_o " الغير مقترنة باى تقريب تجعــــل الدالة " $J(F)$ " مستقرة (Stationary) وبالامكان معرفة فرق الطـــــور " η " بدلالة قيمتها المعطاه فى معادلة (7.42).

الاستطارة التى يتم فيها تبادل جسيمات بين حزمة القذائف والهدف :

(Scattering Accompanied by Rearrangement of Particles between Projectiles and Target)

فى مثل هذه الاحيان يلاحظ مايلى :

- تبادل الالكترونات بين الذرات او الجزيئات المتصادمة مع بعضها .
- تبادل البروتونات او النيوترونات مع تلك الموجودة اصلا فى انوية مادة الهدف .

وحيث انه فى بعض الاحيان الاخرى ربما تكون طبيعة الجسيمات المكونة للمجموعة الفيزيائية بعد الاستطارة مختلفة تماما عن طبيعة الجسيمات المكونة للمجموعة الفيزيائية قبل الاستطارة فسوف يتم تمثيل هذا النوع من الاستطارة على النحو التالى :

$$A + B \longrightarrow C + D$$

ويتضح من ذلك ان الهاميلتونية الخاصة بالحالة النهائية تختلف عن الهاميلتونية الخاصة بالحالة الابتدائية والتى لم تتعرض للاقلاق بعد. زائد الجهد " V " الخاص بالتفاعل . وعادة يتم استخدام فكرة " القناة الكمية لاعادة الترتيب (Quantum Mechanical Rearrangement Chan بمعنى ان الحالة الابتدائية تقابل القناة الخاصة بالترتيب i بينما الحالة النهائية تقابل القناة الخاصة بالترتيب f

وتطبيقا لقانون بقاء الطاقة فان الهاميلتونية والاقلاق يحققان المعادلة :

$$\hat{H}_i + \hat{V}_i = \hat{H}_f + \hat{V}_f \qquad (7.43)$$

ويمكن التعبير عن الحالة الابتدائية كما يلى :

$$\Phi_{ai}(r_i,x_i) = \Phi_{kni}(r_i,x_i) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i}\ \chi_{ni}(x_i) \qquad (7.44)$$

حيث :

$\vec{r}_i =$ متجه موضع مركز كتلة A بالنسبة لمركز كتلة B

$x_i =$ الاحداثيات الداخلية للمجموعتين A و B المتفاعلتين

$\chi_i =$ الدالة الموجية الخاصة بالحالة الداخلية(intrinsic)لكل من A و B

بينما الطاقة الكلية للمجموعة الابتدائية E يمكن التعبير عنها كما يلى :

$$E = E_{kni} = E_{ki} + E_{ni} \tag{7.45}$$

$$= \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu_i} + E_{ni}$$

حيث :

$E_{ki} =$ طاقة الحركة النسبية للمجموعة A و B ، μ_i الكتلة المختزلة لهما
(فى الحالة الابتدائية)

$E_{ni} =$ الطاقة الداخلية للمجموعة A و B (فى الحالة الابتدائية)

وبذلك تتحقق المعادلة الايجينية :

$$H_i \, \Phi_{kni} = E_{kni} \, \Phi_{kni} \tag{7.46}$$

وبالمثل الحالة النهائية تُمَثَّل على النحو التالى :

$$\Phi_{bf}(r_f, x_f) = \Phi_{pf}(r_f, x_f) = e^{i\vec{l}\cdot\vec{r}_f} \, \chi_{pf}(x_f) \tag{7.47}$$

حيث $\vec{r}_f$ هو متجه الموضع لمركز كتلة C بالنسبة لمركز كتلة D . وهـــذه
الحالة النهائية تتميز بالطاقة E_{lpf} حيث

$$E_{lpf} = E_{lf} + E_{pf} \tag{7.48}$$

$$6 \quad E_{\ell f} = \frac{\hbar^2 \ell^2}{2\mu_f} = D, C \text{ طاقة الحركة النسبية للمجموعة } \qquad (7.49)$$

وفيها μ_f هى الكتلة المختزلة للجسيمين C و D بينما الطاقة الداخليـــة لهما E_{pf} ومرة اخرى قانون بقاء الطاقة معناه :

$$E_{ki} + E_{ni} = E = E_{\ell f} + E_{pf} \qquad (7.50)$$

$$\therefore \quad \ell^2 = \frac{\mu_f k^2}{\mu_i} + \frac{2\mu_f (E_{ni} - E_{pf})}{\hbar^2} \qquad (7.51)$$

ويسمح للحالات النهائية فقط التى تحقق شرط ان الجانب الايمن لهذه المعادلـــة ان تكون غير سالبة • وان دالة الاستطارة ψ تحقق معادلة شرودنجر :

$$\hat{H}\psi = E\psi \qquad (7.52)$$

وعندما تصبح r_f كبيرة جدا فان حالة الاستطارة تسلك كما لو كانت موجات مستطـــارة تمثل الحالات النهائية الممكنة للجسيمين C و D • وبما ان هاذين الجسيميـــن غير موجودين اصلا فان معنى ذلك لايوجد موجات مستوية قادمة

$$\therefore \psi(r_f, x_f) \underset{r_f \to \infty}{\sim} \sum_p{}' f(r_f | k_{ni} \to pf) \frac{e^{i\ell r_f}}{r_f} \chi_{pf}(x_f) \qquad (7.53)$$

حيث عملية الجمع $\sum'$ تتم على جميع الحالات الممكنة بما يتفق مع قانون بقـــاء الطاقة • بينما

$$f(r_f | kni \to pf) = \left[\begin{array}{r} \text{سعة الاستطارة التى تقابل انتاج الحالة } \chi_{pf} \text{ الخاصة} \\ \text{بالجسيمين C و D من الحالة الابتدائية } \Phi_{kni} \text{ •} \end{array} \right]$$

والمقطع المستعرض :

$$\sigma(r_f | kni \rightarrow pf) = \left(\frac{v_{pf}}{v}\right) \left| f(r_f | kni \longrightarrow pf) \right|^2 \qquad (7.54)$$

أو

$$\sigma(\Phi_{kni} \longrightarrow \Phi_{\ell pf}) = \left(\frac{v_{pf}}{v}\right) \left| f\,(\Phi_{kni} \longrightarrow \Phi_{\ell pf}) \right|^2 \qquad (7.54)$$

التمييز بين البوزونات والفيرميونات اثناء الاستطارة وأثر ذلك على المقطع المستعرض لها :

مثلما اشرنا قبل ذلك فان الجسيمات المعروفة باسم البوزونـــات (Bosons) هى تلك التى تتميز بحركة مغزلية ذاتية عدد الكم الخاص بها 0 و $\hbar$ 1 و $\hbar$ 2 و .. اى عدد صحيح من $\hbar$ بينما الفيرميونات هى تلك الجسيمات التى تتميز الحركـــة المغزلية الذاتية لها بعدد كم $\frac{1}{2}\hbar$ و $\frac{3}{2}\hbar$ و .... الخ . لنـــــدرس الآن ماذا يحدث لو تصادم اثنان من البوزونات مع بعضهما ثم نتوج ذلك بالحديـــث عن تصادم اثنين من الفيرميونات مع بعضهما . وللسهولة ليكون مثال البوزون هو جسيم الفا (حركته المغزلية صفرا) بينما مثال الفيرميـون الكترون . معنى ذلك ان لكـــل من الحالتين يكون لدينا (راجع معادلة (7.7) ومعادلة (7.5)) :

$$m_1 = m_2$$

$$\theta_c = 2\,\theta_\ell \quad ،$$

$$\sigma(\theta_\ell, \phi_\ell) = 4 \cos \theta_\ell \cdot \sigma_c (2\,\theta_\ell, \phi_\ell) \quad ، \qquad (1)$$

وكالمعتاد لتسهيل المعالجة الرياضية سوف تفترض دالة الجهد بينهما تعتمد فقـــط على الفرق $\vec{r}$ بين متجهى وضعيهما $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ – $(r = r_1 - r_2)$ بينمـــا موضع مركز الكتلة لهما R عبارة عن :

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{r_1 + r_2}{m} \qquad (7.56)$$

اما متجه العدد الموجى للمجموعة $\vec{K}$ فهو $(\vec{K} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2)$ بينما نضع

$$k = \frac{m_2k_1 - m_1k_2}{m_1 + m_2} = \frac{k_1 - k_2}{m} \qquad (7.57)$$

على هذا الاساس فان التعبير عن دالة الحالة Φ_G بدلا من كونه :

$$\Phi\,(r_1r_2|\,\mathcal{J}) = e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{r}_1}\,e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{r}_2} + e^{i\vec{k}_1\vec{r}_2}\,e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{r}_1} \qquad (7.58)$$

نستطيع تحويله بدلالة $\vec{r}$ و $\vec{K}$ و $\vec{k}$ كما يلى :

$$\Phi_G\,(\vec{r},\vec{R}|\,\mathcal{J}) = e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}}\left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right]$$

فاذا كانت الدالة التى تمثل حل معادلة شرودنجر هى $\psi(r)$ بمعنى ان :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r^2 + V(r)\right]\psi(r) = E\,\psi(r) \qquad (7.59)$$

مع تحقيق الشرط الحدى :

$$\psi(r) \underset{r\to\infty}{\sim} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(r)\,\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r} \qquad (7.60)$$

فان الدالة التى تتميز بالتماثل (لانها تمثل مجموعة فيزيائية تشتمل على اثنين من البوزونات) :

$$\psi(r\,|\,\mathcal{J}) = \psi(r) + \psi(-r) \qquad (7.61)$$

تحقق ايضا معادلة (7.59) {لأن $\nabla_{-r}^2 = \nabla_r^2$ ، $V(r) = V(-r)$ }
كما تحقق الشرط الحدى :

$$\psi(r|\mathcal{f}) \underset{r\to\infty}{\sim} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \left[f(r) + f(-r)\right]\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r} \qquad (7.62)$$

ونلاحظ ان الجزء " $f(r) + f(-r)$ " هى سعة الاستطارة التى يحـــدث خلالها ان احد الجسيمين يتحرك فى اتجاه r • والاخر يرتد فى الاتجاه $-r$
وبذلك يكون المقطع المستعرض هو (ثابت المعايرة يساوى الوحدة) :

$$\sigma_c(\theta,\phi) = N\left|f(r) + f(-r)\right|^2$$

$$= N\left|f(\theta_c,\phi) + f((\pi-\theta_c),(\phi+\pi))\right|^2$$

$$= N\left\{\left|f(\theta_c,\phi)\right|^2 + \left|f((\pi-\theta_c),(\phi+\pi))\right|^2\right.$$

$$\left. + 2\,\mathrm{Re}\left|(f^*(\theta_c,\phi)\cdot f((\pi-\theta_c),(\phi+\pi))\right|\right\} \qquad (7.63)$$

وهنا ثابت المعايرة N مساويا للوحدة •
ولكن سعة الاستطارة عبارة عن (راجع مثال محلول (٧ ـ ٣))

$$f(\theta,\phi) = f(\theta) = -\frac{\gamma}{2k\sin^2\frac{\theta}{2}}\,e^{\left[-i\gamma\log(\sin^2\frac{\theta}{2})+2i\cdot\arg(1+i\gamma)\right]} \qquad (7.64)$$

على اساس ان الاستطارة بين الجسيمين الفا نعتبره هنا نتيجة التفاعل الكولومى فقط •

$$\therefore \sigma_l(\theta_l,\phi_l) = 4\cos\theta_l\left[\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o Mv^2}\right]^2\cdot\left[\mathrm{cosec}^4\theta_l + \sec^4\theta_l\right.$$

$$\left. + 2\,\mathrm{cose}^2\theta_l\,\sec^2\theta_l\cdot\cos\left\{\frac{4\,Ze^2}{4\pi\epsilon_o\hbar v}\log\tan^2\theta_l\right\}\right] \qquad (7.65)$$

هذا فيما يختص باستطارة جسيم الفا بواسطة جسيم الفا آخر كمثال لاستطارة البوزونات • اما بالنسبة لاستطارة الكترون بواسطة الكترون آخر كمثال لاستطارة الفيرميونات فان نفس النتيجة (7.63) تستخدم هنا ولكن بالاضافة الى ذلك نلاحظ مايلي :

رأينا في الباب الرابع أن تقارن الحركة المغزلية $\frac{1}{2}\hbar$ مع حركة مغزلية $\frac{1}{2}\hbar$ تؤدى الى ظهور أربع دوال $\Phi_{1,1}$ و $\Phi_{1,0}$ و $\Phi_{1,-1}$ و $\Phi_{0,0}$. الثلاث دوال الاولى منها تتميز بانها متماثلة في حيز الحركة المغزلية بينما الدالة الرابعة $\Phi_{0,0}$ تتميز بانها غير متماثلة في هذا الحيز • معنى ذلك ان الدوال الثلاث الاولى $\Phi_{1,1}$ و $\Phi_{1,0}$ و $\Phi_{1,-1}$ يجب ان تستخدم مع $\left[u_i(1)\ u_j(2) - u_i(2)\ u_j(1)\right]$ بينما الدالة الرابعة $\Phi_{0,0}$ يجب ان تستخدم مع $\left[u_i(1)\ u_j(2) + u_i(2)\ u_j(1)\right]$ حيث $u_n' s$ ترمز لمجموعة الدوال الكاملة المرتبطة باحداثيات الحيز (r) للالكترونيه ، ومعنى هذا بالتالي ان الدوال $\Phi_{1,1}$ و $\Phi_{1,0}$ و $\Phi_{1,-1}$ تستخدم مع $\left[\psi(r) - \psi(-r)\right]$ والدالة $\Phi_{0,0}$ تستخدم مع $\left[\psi(r) + \psi(-r)\right]$ •

وحيث ان كل من تلك الحالات لها سعة استطارة تميزها وبافتراض انها جميعا تتواجد باحتمالية متساوية اذا المقطع المستعرض لاستطارة الكترون بواسطة الكترون آخر تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sigma_c(\theta_c,\phi_c) = \frac{1}{4}\left[f(\theta_c,\phi_c) + f((\pi - \theta_c),\ (\phi_c + \pi))\right]^2$$

$$+ \frac{3}{4}\left[f(\theta_c,\phi_c) - f((\pi - \theta_c),\ (\phi_c + \pi))\right]^2 \quad (7.66)$$

$$\therefore \sigma_l(\theta_l,\phi_l) = 4\cos\theta_l \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2}\right)\cdot\Big[\operatorname{cosec}^4\theta_l + \sec^4\theta_l - \operatorname{cosec}^2\theta_l\ \sec^2\theta_l\ \cdot\cos\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar v}\log\tan^2\theta_l\right)\Big] \quad (7.67)$$

والجدير بالذكر ان نتائج التجارب التى أجريت باستخدام غرفة السحابة اوضحت صحة العلاقتين (7.65) و (7.67) .

استطارة جسيم بواسطة جسيمين آخرين فى نفس اللحظة :

مثل هذه الاستطارة تحدث بين الجسيمات اذا كان التفاعل بينهما كهرومغناطيسيا مثلما يحدث عند استطارة الكترون بواسطة ذرتى جزيء . او اذا كان التفاعل بينهما نوويا مثلما يحدث عند تفاعل نيوكليون مع اثنين من النيوكليونات داخل نفس النواه الأم (الانوية الاخرى) المجاورة لها ليس لها تأثير لأن القوى النووية قوى تتميز بأنها قصيرة المدى ـ ١٠ ـ ١٥ متر او اقل ـ ومختلفة اذاً تماما عن التفاعلات الكولومية .

ولتبسيط المسألة بقدر الامكان لنأخذ حالة محددة ولتكن استطارة حزمة الكترونية بواسطة جزئيات الأكسجين :

عندما تقترب موجات الالكترونات تجاه جزيء الاكسجين فانه عندما تصل اليه يكون هناك فرق فى الطور بين تلك التى تصل عند احد ذرتيه والاخرى وذلك بالمقارنة بالطور نسبة الى مركز الجزيء . فاذا رمزنا للمسافة "المتوسطة" الفاصلة بين ذرتى الجزيء بالمتجه $\vec{D}$ فان احد الطورين يكون مساويا " $\frac{1}{2}\vec{k}\cdot\vec{D}$ " بينما الطور عند الذرة الثانية يكون مساويا " $-\frac{1}{2}\vec{k}\cdot\vec{D}$ " . معنى ذلك ان موجه الالكترون المستطارة عند وصولها عند الكاشف تكون عبارة عن :

لأن $\vec{R}_1 \sim \vec{R}_2 \sim \vec{r}$ ، $\vec{D} << \vec{r}$

$$\Psi_{scatt.} = e^{i\frac{k\cdot D}{2}} \left\{ \frac{e^{ikR_1}}{R_1} f(\theta) \right\} + e^{-i\frac{\vec{k}\cdot\vec{D}}{2}} \left\{ \frac{e^{ikR_2}}{R_2} f(\theta) \right\}$$

حيث سعة الاستطارة يُعوض عنها في هذه الحالة فيما بعد بالاستفادة من معادلة (7.64) التي يتم اشتقاقها في المثال المحلول رقم (٧ـ٣) .

واذا ماتذكرنا أن بُعْدَ الاستطارة للتبه k يصبح k' (ولو ان $|k| = |k'|$) :
فإن :

$$kR_1 = kr - \tfrac{1}{2}\vec{k}'\cdot\vec{D} \ , \ kR_2 = kr + \tfrac{1}{2}\vec{k}'\cdot\vec{D}$$

وعليه نحصل على :

$$\Psi_{scatt.} = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r} \left\{ e^{i\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{D}-\vec{k}'\cdot\vec{D}}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{D}-\vec{k}'\cdot\vec{D}}{2}\right)} \right\} f(\theta)$$

$$= 2\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r} \cdot \cos \frac{(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{D}}{2} \cdot f(\theta)$$

$$\therefore\ \sigma(\theta) = 4\cos^2\left[\frac{(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{D}}{2}\right] \cdot |f(\theta)|^2$$

مثال محلـول (٧ـ١) :

تفاعل ما مع انوية $^{12}_{6}C$ المقطع المستعرض " σ " له عبارة عن واحد مللـى بارن $(1\ mb = 1\ millibarn = 10^{-27} cm^2)$ • فاذا فُرض ان الشريحة الكربونيـة التى تُسلط عليها حزمه قذائف نووية خاصة بهذا التفاعل سمكها " x " عبارة عـن ١,٠ سم • وكثافتها " ρ " تساوى ٢ جم / سم٣ • احسب النسبة " I/I_o " التى يحدث لها هذا التفاعل •

الحـل :

اذا رمزنا لعدد افوجادرو بالرمز N_a (وهو عبارة عن ٦,٠٢ × ١٠^٢٣ لكـل جزئ جرامى) فان عدد انوية الكربون فى وحدة الحجوم من الهدف يكون مساويـا :

$$n = \frac{N_a \cdot \rho \cdot x}{12}$$

$$\therefore \frac{I}{I_o} = \sigma \cdot n = \frac{(10^{-27}) \cdot (6.02)\ x\ 10^{23}) \cdot (2) \cdot (0.1)}{12} = 10^{-5}$$

مثال محلـول (٧ـ٢) :

وضح كيف ان الموجه المستوية " $e^{ikr \cos \Theta} = e^{ikz}$ " تُعتبـر تطابق متوافق من موجات كريه •

الحـل :

بما ان الموجه المستوية تقابل حركة جسيم حر اذاً نتعامل مع المعادلة الموجيـة فى صورتها :

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

وأحد حلولها هو :

$$\psi = e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} \quad (7.68)$$

كما ان من الممكن حل هذه المعادلة بدلالة الاحداثيات القطبية الكريه مـع اعتبار وجود تماثل كرى (أى ان الزاوية ϕ تغيرها لايؤثر فى الدالـة لان ψ بصورتها المعطاه "$e^{ikr \cos \theta}$" تعنى ذلك) :

$$\psi = R(r)\,\Theta(\theta)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{R}\left(\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right)\right) + k^2 r^2 R(r) =$$

$$= -\frac{1}{\Theta(\theta)} \sin\theta \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) = \ell(\ell+1) \quad (7.69)$$

وبسبب جعل الدالة $\Theta(\theta)$ محدده عند " $\cos\theta = \pm 1$ " فان هذا يعنى ان $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ • وعلى ذلك فالحلول بالنسبـة للدالة القطرية $R(r)$ والدالة القطبية $\Theta(\theta)$ تصبح :

$$R(r) = j_\ell\,(kr) \qquad \text{دالة بسل} \qquad (7.70)$$

$$\Theta(\theta) = P_\ell\,(\cos\theta) \qquad \text{دالة ليجاندر متعددة الحدود} \qquad (7.71)$$

إذاً حل المعادلة الموجية للجسيم الحر يمكن التعبير عنه كجمع خطى لدالة بسـل ودالة ليجاندر :

$$\therefore \quad e^{ikr\cos\theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell \, j_\ell(kr) \, P_\ell(\cos\theta) \qquad (7.72)$$

وبضرب هذه المعادلة فى " $P_{\ell'}(\cos\theta)\, d(\cos\theta)$ " والاستفادة من خاصية دوال ليجاندر :

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(\cos\theta)\, P_{\ell'}(\cos\theta)\, d(\cos\theta) = \frac{2\,\delta_{\ell\ell'}}{2\ell+1} \qquad (7.73)$$

$$\therefore \quad A_\ell \, \frac{2}{2\ell+1} \, j_\ell(kr) = \int_{-1}^{+1} e^{ikr} P_{\ell'}(\cos\theta)\, d\cos\theta$$

وحيث ان هذه النتيجة صحيحة لجميع قيم " kr " اذا لو اخترنا " $r \to \infty$ " نحصل على (مع اجراء التكامل فى الطرف الايمن بالتجزىء) :

$$\therefore \quad A_\ell \, \frac{2}{2\ell+1} \cdot \frac{1}{kr} \cdot \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) = \frac{2}{kr}\, i^\ell \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \quad A_\ell = (2\ell+1)\, i^\ell \qquad (7.74)$$

$$\therefore \quad e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{0}^{\infty} (2\ell+1) \cdot i^\ell \cdot P_\ell(\cos\theta) \cdot j_\ell(kr) \qquad (7.75)$$

مثال محلول (٧-٣) :

استنتج معادلة (7.64) الخاصة بالاستطارة الكولومية (Coulomb Scattering) .

الحـــل :

بما ان الاستطارة كولومية فهذا يعنى ان جسيمى الفا المتصادمين يتفاعــــلان بتاثير الجهد التالى (بالطبع $Z_1 = Z_2 = 2$ فى هذه الحالة) :

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} \qquad (7.76)$$

وبذلك تكون معادلة شرودنجر كما يلى (حيث نرمز للتعبير "$Z_1 Z_2 e^2/4 \pi \epsilon_0 \hbar v$" بالرمز " γ ") :

$$\left[\nabla^2 + k^2 - \frac{2\gamma k}{r}\right]\psi(r) = 0 \qquad (7.77)$$

وبوضع

$$\psi(r) = e^{ikz} \cdot f(r,z)$$

$$\therefore \nabla^2 f + 2 ik \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{2\gamma k}{r} f = 0 \qquad (7.78)$$

وحيث ان " $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ "

$$\therefore \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

وبالتعبير عن الدالة f بصورة : $f = g(r - z)$

$$\therefore \nabla^2 f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial z} - 1\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z} - 1\right)^2 \right] \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$$

$$+ \left[\frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} \right] \frac{\partial g}{\partial r}$$

$$\therefore \nabla^2 f = 2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \frac{z}{r} + \frac{2 g}{r}$$

$$، \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{z}{r} - 1\right) \frac{\partial g}{\partial r}$$

وبالتعويض عن " $\nabla^2 f$ " " $\partial f / \partial z$ " فى معادلـــــة (7.78)
نجد ان :

$$(r - z) \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \left[1 - ik\ (r - z) \right] \frac{\partial g}{\partial r} - \gamma k g = 0$$

حيث نلاحظ ان " $ik\ (r - z)$ " عبارة عن :

$$ik(r-z) = ik(r - r \cos \theta) = ikr(1 - \cos \theta)$$

$$= 2\ ikr\ \sin^2 \frac{\theta}{2} = u$$

$$\therefore \quad u \frac{d^2 f}{du^2} + (1 - u) \frac{df}{du} + i\gamma f = 0 \qquad (7.79)$$

وباتباع الاسلوب التقليدى لحل مثل هذه المعادلة التفاضلية " الهندسية " بمعنـــى التعبير عن الدالة " f " كمتسلسلة بدلالة المتغير " u " نجد ان :

$$f = \sum_{n=o}^{\infty} a_n u^n \quad , \quad (a_o \neq 0) \qquad (7.80)$$

$$\therefore \quad \frac{df}{du} = \sum n\, a_n\, u^{n-1} \qquad (7.81)$$

$$، \quad \frac{d^2f}{du^2} = \sum n\,(n-1)\, a_n\, u^{n-2} \qquad (7.82)$$

وبالتعويض عن " $df/du, f$ و df^2/du^2 " فى (7.79) وتجميع الحدود المشتركة كما هو معروف فى مثل هذه الحالة نحصل على :

$$a_n = \frac{(n-1-i\gamma)\,(n-2-i\gamma)\,\ldots\,(-i\gamma)}{(n!)\,(n)\,(n-1)\,\ldots\ldots\,(1)}\; a_o$$

$$= \frac{\left\{ \frac{\Gamma(n-i\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)} \right\} a_o}{\left\{ \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)} \right\} n!} \qquad (7.83)$$

مع تذكرنا أن من خصائص " دالة جاما Gamma Function " أن
" $\Gamma(n+1) = n\;\Gamma(n)$ "

وبذلك يكون الحل الذى نحاول الوصول اليه لمعادلة (7.77) عبـــارة عن (مع تذكرنا ان " $u = 2\, ikr \sin^2 \frac{\theta}{2}$ ") :

$$\psi(r) \underset{(r-z)\to\infty}{\sim} \frac{A\, e^{\pi\gamma/2}}{\Gamma(1+i\gamma)} \Big\{ e^{i(kz+\gamma\log(k(r-z))} \; 1 + \frac{\gamma^2}{ik(r-z)} + \cdot$$

$$+ \frac{(1+i\gamma)}{(-i\gamma)} \cdot \left(e^{i(kr-\gamma\log(k(r-z))}/2\, ikr \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[1 + \frac{(1+i\gamma)^2}{ik\,(r-z)} + \ldots \right] \Big\} \qquad (7.84)$$

والحد الاول داخل القوسين يمثل موجه مستوية حدث لها تحوير بمعامل طور عبـــارة عن " $i\gamma \log(k(r-z))$ " بينما الحد الثانى منه بالبعد بدرجة كافيـــة عن مركز الاستطارة يأخذ الصورة :

$$\frac{\Gamma(1+i\gamma)}{i\Gamma(-i\gamma)} \cdot \frac{e^{-i\gamma \log(\frac{\sin^2\theta}{2})}}{2k\sin^2\frac{\theta}{2}} = f_c(\theta) \qquad (7.85)$$

ويمكننا فهم هذا على ان f_c تمثل موجه صادرة من مركز الاستطارة ، وقد حـــدث لها تحوير نتيجة التفاعل الكولومى اى ان $f_c(\theta)$ تعتبر سعة استطارة ومع تذكرنـــا مرة اخرى ان من خصائص دالة جاما :

$$\Gamma(1-i\gamma) = -i\gamma\Gamma(-i\gamma) = \Gamma(1+i\gamma)$$

$$\therefore f_c(\theta) = -\frac{\gamma}{2k\sin^2\frac{\theta}{2}} e^{\left[i\gamma\log(\sin^2\frac{\theta}{2})+2i\arg\Gamma(1+i\gamma)\right]}$$

وهى معادلة (7.64) .

بسم الله الرحمن الرحيم

الباب الثامن

معالجة الاستطارة مع اخذ تغير الزمن في الاعتبار

(Scattering Treatment With Time-Variation Consideration)

حتى الآن لم نذكر في نقاشنا عن موضوع الاستطارة عامل تغير الزمن واكتفينا بالاسلوب الذى يعتمد على حل معادلة شرودنجر لقيم موجبة من الطاقة (القيم السالبة للطاقة تقابل حلول للمجموعات الفيزيائية المرتبطة والتي تتميز بدالة الحالة التي تتلاشى عند ∞) وهى في صورتها المستقلة عن الزمن • هذا الاسلوب ينقصه نقطتان هامتان : الاولى هى ان الاستطارة عبارة عن عملية ديناميكية تحدث خلال فترة زمنية تعطى منذ اللحظة التي ينطلق فيها الجسيم من مصدره ويتجه كقذيفة ليصطدم بأحد الجسيمات (او اكثر) من الهدف ثم يسجل ناتج الاستطارة (او التفاعل) بكاشف مناسب • واضح ان مثل هذه العملية يكون من الافضل تفسيرها مع أخذ تغير الزمن في الاعتبار • والنقطة الثانية هى رياضية في طبيعتها اذ أننا رأينا ان الدوال الموجية في ميكانيكا الكم مفروض انها عناصر في حيز هيلبرت وتخضع لشروط المعايرة ومرتبطة ارتباطا مباشرا بعملية استنتاج احتمالية تواجد الجسيمات في هذا الحيز •

ولتبيان معالجة الاستطارة مع أخذ تغير الزمن في الاعتبار سوف نكتفى بمناقشة تقريب بورن (Born Approximation) ثم نتبعه بمناقشة ظاهرة الاستطارة الرنينية (Resonant Scattering) :

المعالجة الكمية التقريبية للاستطارة تبعا لطريقة بُسوْن :

اثناء دراستنا لنظرية الاقلاق التى تعتمد على احداثى الزمن توصلنا الى علاقـة مسماه بالقاعدة الذهبية (The Golden Rule) والتى تعطى معدل الزيـادة فى احتمالية وجود جسيم مستطار وهى فى احد الحالات الكمية النهائية بعدما كان فـى الحالة الابتدائية ــ ولنرمز لهما على الترتيب بالرمزين " l " ، " k " .

$$\frac{\partial P^{l}}{\partial t} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\langle l \left| H^{(1)} \right| k \rangle\right|^2 \rho_{\bar{l}}(E) \qquad (7. \ \ )$$

ولقد وضعت l بالصورة $\bar{l}$ لتشير الى ان كثافة الحالات $\rho(E)$ مرتبطـــة بحالات عديدة مجاورة لبعضها وأن $\langle l|$ هى احداها .

بينما $\langle l | H^{(1)} | k \rangle$ تعبر عن الانتقالات الى احد الحـــالات التى طاقتها E_u (أى المحافظة على الطاقة) . ومع افتراض ان عنصر المصفوفـة لايتغير كثيرا على مدى مجموعة تلك الانتقالات لهذا استخدمنا العلاقة التقريبية :

$$\left|\langle l \left| H^{(1)} \right| k \rangle\right|^2 = \int K \langle l \left| H^{(1)} \right| k \rangle\Big|^2 \ \delta(E_{l} - E_k) \ dE_{l} \qquad (8.1)$$

وبما ان (راجع معادلة (7.3)) : " $d\sigma = dN(\theta) / I$ " فـــاذا عبّرنا عن كثافة الجسيمات فى الحزمة القادمة (القذائف) بالقيمـة $\frac{1}{\Omega'}$ (Ω' هو حجم الحيز المتاح " وليكن حجم المعمل الذى تجرى فيه تجربة الاستطـــارة ") علما بأن سرعة تلك القذائف هو v فان :

$I =$ عدد الجسيمات القادمة تجاه مركز الاستطارة فى الثانية عبر وحدة المساحات $= \frac{1}{\Omega'} \cdot v$

$$= \frac{1}{\Omega'} \cdot \frac{\hbar k}{\mu} \qquad (8.2)$$

بينما نعبر عن الجسيم القذيفة بالدالة " $\psi_k^{(o)} = \frac{1}{\Omega'} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ " والجسيم المستطار بالدالة " $\psi^{(o)} = \frac{1}{\Omega'} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}}$ " على اساس ان الحالات النهائية نتيجة الاستطارة جميعها ملاصقة لتلك الدالة $\psi^{(o)}$ • وتذكرنا ان المعدل الذى يُسجّل به الكاشف الجسيمات المستطارة " $dN(\Theta)$ " ماهو الا معدل الاحتمالية كما هو معطى فى معادلة (7.26) • بينما كثافة الحالات ρ_l عبارة عن :

$$\rho_l = \frac{dN_l^s}{dE} = \frac{dN_l^s}{dp} \cdot \frac{dp}{dE}$$

$$= \left(\frac{\Omega' p^2 \cdot d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \right) \cdot \left(\frac{\mu}{p} \right) \qquad (8.3)$$

اذا نحصل على التعبير الخاص بالمقطع المستعرض التفاضلى $\sigma(\Theta)$ للاستطارة على الوجه التالى :

$$\sigma(\Theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\mu\,\Omega'}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \cdot \left| \langle l \,|\, H^{(1)} |\, k \rangle \right|^2 \qquad (8.4)$$

وهذا يعنى ان سعة الاستطارة $f(\Theta)$ عبارة عن

$$f(\Theta) = \pm \frac{\mu\Omega'}{2\pi\hbar^2} \left| \langle l \,|\, H^{(1)} |\, k \rangle \right|^2$$

ودائما نُختار العلامة السالبة (ـــ) أى أن :

$$f(\Theta) = - \frac{\mu\Omega'}{2\pi\hbar^2} \left| \langle l \,|\, H^{(1)} |\, k \rangle \right|^2 \qquad (8.5)$$

وسبب هذا الاختيار هو ان تكون هذه العلاقة (8.5) متفقة مع مثيلتها عند استنتاج التعبير الخاص بالسعة $f(\Theta)$ على اساس ان الاستطارة ناتجة عن مايشبه حيود الموجات القادمة تجاه عائق موجود عند مركز الاستطارة •

والفكرة المميزة للتقريب الذى افترضه بورن بالنسبة لاستخدام هذه العلاقة التـــى توصل اليها عام (١٩٢٦) هى ان دالة الموجه الواقعية عندما تكون قريبة جدا مـــن مركز الاستطارة تتميز بعدم اختلافها كثيرا عما تكون عليه فى غياب قوة التفاعل التـــى تتسبب فى الاستطارة • معنى ذلك امكانية استخدام الدوال السابق الاشارة اليهــــا $\psi_k^{(o)}$ و $\psi_\ell^{(o)}$ لتمثيل الحالة الابتدائية واحدى الحالات النهائية ــ علـــى التوالى • وعلى ذلك اذا كانت هاميلتونية التفاعل $\hat{H}^{(1)}$ تمثل بالجهد المتماثـــل كريا $V(r)$ تنتج سعة الاستطارة على النحو التالى (راجع معادلـة (1.14)) ، ولاحظ اختفاء حجم الحيز المتاح من النتيجة النهائية كما هو متوقع فيزيائيا :

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= -\frac{\mu\,\Omega'}{2\pi\hbar^2}\left\langle \ell \,\middle|\, H^{(1)} \,\middle|\, k\right\rangle \\
&= -\frac{\mu\,\Omega'}{2\pi\hbar^2}\int \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{\Omega'}}\, e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}}\right) V(r) \left(\frac{1}{\sqrt{\Omega'}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) \right\} d\tau \\
&= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}}\, V(r)\, d\tau \\
&= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int e^{i(k-k')r\cos\theta'}\, V(r)\left[r^2 \cdot \sin\theta'\, dr\, d\theta'\, d\phi\right] \\
&= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty r^2 V(r)\, dr \cdot \int_0^\pi \sin\theta'\, e^{i(k-k')r\cos\theta'}\, d\theta' \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= -\frac{2\mu}{\hbar^2(k-k')}\int_0^\infty r\, V(r)\, \sin(k-k')r\, dr \qquad (8.6)
\end{aligned}
$$

وهذا هو التعبير الخاص بتقريب بورن لحساب سعة الاستطارة $f(\theta)$ •

الاستطارة الرنينيـــة :

في كثير من الاحيان فان التجارب المعملية توضح نتائجها ان المقطع المستعـرض لتفاعل ما (سواء على المستوى الذرى مثل استطارة الكترونات بواسطة ذرات الهيليوم ـ او على المستوى النووى مثل استطارة ميزونات باى بواسطة البروتونات او التقـــاط النيوترونات البطيئة بواسطة انوية ذرات الكادميوم) يتميز بصفة رنينية ـ بمعنـــى ان قيمة المقطع المستعرض التجريبية تصل الى قيمة قصوى ومقابلة لقيمة محددة مــن طاقة الحركة للجسيمات (مثلا في حالة النيوترونات البطيئة) او الطاقة الكلية المتاحـة للتفاعل في نظام مركز الكتلة (مثلا في حالة تولد الجسيمات الاولية المعروفة باســم " جسيمات الرنين " كجسيمات أوميجا وجسيمات رُو • مثل هذه التفاعلات الرنينيـــة وُجد انها يمكن فهمها في اطار اساسيات نظرية الاقلاق التي تأخذ احداثى الزمــن في الاعتبار حيث تؤدى الى علاقة رياضية تُفسر العديد من خصائص تلك التفاعـلات • هذه العلاقة تعرف بعلاقة برايت ـ فيجنر وسوف نحاول تبسيط كيفية التوصل اليها :

علاقة برايت فيجنر : (Breit-Wigner Relation)

مرة اخرى نبدأ بمعادلة القاعدة الذهبية التي توصلنا اليها اثناء نقاشنا لنظريـــة الاقلاق • ولتحديد النقاش الفيزيائي نحاول ان نتدارس هذه المعالجة على تفاعـــل نيوتروني نشير اليه بالمعادلة التالية :

$$n + A \longrightarrow C^{*} \longrightarrow B + \gamma \qquad (8.7)$$

هذا التفاعل يمثل التقاط نيوترون " بطئ " بواسطة نواه " A " لتنتـــج نواه مركبة " C^{*} " غير مستقرة والتي تتآكل بدورها بعد متوسط عمر مميز لهـــا فينبعث فوتون " جاما (γ) " وترتد نواه " B " •

مثل هذه النواه المركبة الغير مستقرة " C^* " تعنى حالة نووية وسطيـــة تتميز بمستويات طاقة محددة تربط بين الحالات الابتدائية (وهذه تتميز " بشريـــط متصل " من الطاقة) والحالات النهائية (وايضا تتميز بشريط متصل من الطاقـــة خاص بها) • من وجهة نظر ميكانيكا الكم هذا الاتصال يمثله عنصر مصفوفة نشيـــر اليه بالرمز " H_{ac} " وعنصر مصفوفة آخر " H_{bc} " • حيـــث " H_{ac} " يصل بين " C^* " والمجموعة الفيزيائية " $A + n$ " بينما " H_{bc} " يصـــل بين " C^* " والمجموعة الفيزيائية " $B + \gamma$ " • هذا على اساس اهمـــال أيّ من العناصر الاخرى مثل " $H_{aa'}$ " (الذى يربط الحالات الابتدائية بنفسها) وكذلك " H_{ab} " الذى يربط بين الحالات الابتدائية والحالات النهائيـــة دون تكون الحالة الوسطية " C^* " (اى التفاعل المباشر) •

لنرمز اذاً لمجموعة السعات التى تميز المجموعة الابتدائية $(A + n)$ بالرمـــز a_a بينما a_b نرمز لتلك التى تميز المجموعة $(B + \gamma)$ والسعة a_c تميز النواه المركبة C^* (سوف يفترض ان هناك حالة كمية وسطية مفردة ذات اهمية للتفاعل الذى ندرسه) •

بتطبيق القاعدة الذهبية نلاحظ ان :

$$\dot{a}_a = \frac{1}{i\hbar} \int u_a^* H^{(1)} u_c \, d\tau \cdot e^{\frac{i(E_a - E_c)t}{\hbar}} a_c$$

$$= \frac{1}{i\hbar} H_{ac} \, e^{\frac{i(E_a - E_c)t}{\hbar}}$$

$$\text{،} \quad \dot{a}_b = \frac{1}{i\hbar} H_{bc} \, e^{\frac{i(E_b - E_c)t}{\hbar}} \cdot a_c$$

$$6 \quad \dot{a}_c = \frac{1}{i\hbar} \sum_a H_{ca}\, e^{\frac{i(E_c-E_a)t}{\hbar}}\, a_a + \frac{1}{i\hbar} \sum H_{cb}\, e^{\frac{i(E_c-E_b)t}{\hbar}}\, a_b$$

مع ملاحظة انه عند اللحظة " $t = 0$ " فان :

$$a_{a_o} = 1 \qquad \text{(وهذه يتم اختيارها تبعا لظروف التجربة)}$$

$$a_a = 0 \qquad , \qquad a \neq a_o$$

$$a_c = a_b = 0 \qquad , \qquad \dot{a}_a = \dot{a}_b$$

بينما a_c تزداد مع مرور الزمن ولذلك " $\dot{a}_c \neq 0$ " موضحة عملية بنـــاء احتمالية ان المجموعة فى الحالة الوسطية C^* • وبمجرد ان تصبح a_c اكبـــر من الصـــفر تبدأ كل من a_a و a_b فى الازدياد • ولنفرض زيادة a_c تدريجيا حتى اصبحت " $a_c = 1$ " وتستطيع C^* ان تتآكل الى المجموعة $(n + A)$ او الى المجموعة ($\gamma + B$) باحتمالية انتقال تبعا للعلاقة :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{C^*} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|H_{km}\right|^2 \frac{dn}{dE}$$

$(n+A)$ او $(B+\gamma)$

وعلى ذلك فان احتمالية الانتقال الى ($\gamma + B$) هى :

$$\frac{1}{\tau_\gamma} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|H_{bc}\right|^2 \cdot \frac{4\pi P_\ell^2}{8\pi^3 \hbar^3 v_\gamma}$$

$$= \frac{1}{\pi \hbar^4} \left|H_{bc}\right|^2 \cdot \frac{\hbar^2 \omega^2}{c^3}$$

بينما احتمالية الانتقال الى $(A + n)$ هى :

$$= \frac{1}{\tau_n} = \frac{m_n^2}{\hbar^4} \overline{\left| H_{ac} \right|^2} \, v_n$$

(مع افتراض ان الدوال الموجية مُعايرة ـ داخل حيز يساوى الوحدة) .

وبما ان احتمالية شغل الحالة C عبارة عن :

$$\left| a_c \right|^2 = e^{-\frac{t}{\tau_n}} \, e^{-\frac{t}{\tau_\gamma}} = e^{-t\left(\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_\gamma}\right)}$$

$$\therefore \quad a_c = e^{-\frac{t}{2}\left(\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_\gamma}\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{da_c}{dt} = -\left(\frac{1}{2\,\tau_n} + \frac{1}{2\,\tau_\gamma}\right) a_c$$

وحيث أن ـ من مبدأ اللاتحديد لهايزنبرج ـ

$$\Delta E \cdot \Delta t = \hbar$$

حيث $\Delta t = \tau$ ، $\Delta E = 2\Gamma$ وحيث Γ يمثل منتصف اتساع المنحنى الرنينى عند منتصف ارتفاعه .

$$\therefore \quad \frac{\Gamma_n}{\hbar} = \frac{1}{2\,\tau_n} \quad , \quad \frac{\Gamma_\gamma}{\hbar} = \frac{1}{2\,\tau_\gamma}$$

$$\therefore \quad \Gamma_n + \Gamma_\gamma = \frac{\hbar}{2}\left[\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_\gamma}\right]$$

ولكن : $\frac{1}{\tau_n}$ = احتمالية التآكل الى الحالة $(A + n)$

$\frac{1}{\tau_\gamma}$ = احتمالية التآكل الى الحالة $(B + \gamma)$

اذا الاحتمالية الكلية فى وحدة الزمن لتآكل الحالة الوسطية = $\Gamma_n + \Gamma_\gamma$

$$\therefore \left[\frac{1}{2\tau_n} + \frac{1}{2\tau_\gamma}\right] = (\Gamma_n + \Gamma_\gamma) / \hbar = \frac{\Gamma}{\hbar}$$

$$\therefore \frac{d\,a_c}{dt} = -\left[\frac{1}{2\tau_n} + \frac{1}{2\tau_\gamma}\right] a_c = -\frac{\Gamma}{\hbar} \cdot a_c$$

ونلاحظ انه فى نفس الفترة الزمنية التى تتآكل خلالها هذه الحالة الوسطية يحـــــدث تولد لها من جراء الحالة $(A + n)$ بمعدل عبارة عن :

$$\frac{d\,a_c}{dt} = -\frac{\Gamma}{\hbar}\, \varepsilon_c + \frac{1}{i\hbar} H_{ca_o}\, e^{\frac{i(E_c - E_{a_o})t}{\hbar}} \cdot a_{a_o}$$

حيث " $a_{a_o} = 1$ " إذ أن جميع الحالات " a " مشغولة

$$\therefore a_c = \frac{-\frac{i}{\hbar} H_{ca_o}\, e^{\frac{i(E_c - E_{a_o})t}{\hbar}} - e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} t}}{\frac{i}{\hbar}(E_c - E_{a_o}) + \frac{\Gamma}{\hbar}}$$

وبعد حوالى " 10^{-13} " من الثانية تصبح " $e^{-\frac{\Gamma}{\hbar}t}$ " مساوية للصفر تقريبا

$$\therefore |a_c|^2 = \frac{|H_{ca_o}|^2}{(E_c - E_{a_o})^2 + \Gamma^2}$$

ومعنى هذه النتيجة ان عدد التفاعلات التى تؤدى الى $(B + \gamma)$ فـــى الثانية الواحدة عبارة عن :

$$|a_c|^2 \cdot \frac{1}{\tau_\gamma} = |a_c|^2 \cdot \frac{2\Gamma_\gamma}{\hbar}$$

$$= \frac{|H_{ca_o}|^2}{(E_c - E_{a_o})^2 + \Gamma^2} \cdot \frac{2\Gamma_\gamma}{\hbar}$$

$$= \sigma_{(n,\gamma)} \cdot v_n$$

ولكـن

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{m_n^2}{\upsilon \hbar^4} |H_{ac}|^2 \, \upsilon_n = \frac{2\gamma_n}{\hbar}$$

$$\therefore |H_{ac}|^2 = \frac{2\pi \hbar^3 \Gamma_n}{\hbar \, \upsilon_n \cdot m_n^2}$$

$$\therefore \sigma_{n,\gamma} = \frac{4\pi \hbar^2 \Gamma \Gamma_n}{\upsilon \, \upsilon_n \cdot m_n^2} \cdot \frac{1}{\Gamma^2 + (\delta E)^2}$$

ولكن $\Gamma_n = \Gamma_n^R$ عندما تكون سرعة النيوترون υ_n مساويـــة υ_R عندما تكون طاقة النيوترون هى المضبوطه لاحداث الرنين (حرف R يشير للرنين) :

$$\therefore \frac{\Gamma_n}{\upsilon} = \frac{\Gamma_n^R}{R}$$

$$\therefore \sigma_{n,\gamma} = 4\pi \, \chi \chi_R \cdot \frac{\Gamma_\gamma \Gamma_n^R}{\Gamma^2 + (\delta E)^2} \qquad (8.8)$$

كما أشرنا فى البداية فان هذه العلاقة (برايت ـ فِجْنَر) تحقق جميــــع المشاهدات التجريبية الخاصة بالمقطع المستعرض للتفاعلات الرنينية كما انها فســـرت العديد من المشاهدات المرتبطة بتولد الجسيمات الرنينية •

كيفية تعيين كمية الحركة المغزلية لجسيم بواسطة قياس المقطع المستعرض للاستطارة المشـــارك فيهـــــا :

لنفرض ان لدينا تفاعل بين قذيفة a وهدف A لينتج جسيمين b و B عن طريق تكون حالة وسطية رنينية C^* • مُعبَّر عنه بالمعادلة :

$$a + A \longrightarrow C^* \longrightarrow b + B$$

وان كمية التحرك الزاوى لكل منها (ويحتوى كذلك على حركته المغزلية الداخلية) هى I_a و I_A و I_b و I_B • بينما يتم التفاعل نفسه عن طريق الانتقـــال من حالة ابتدائية متميزة بكمية تحرك زاوى l لتكوين الحالة المركبة (الوسطيـــة) الرنينية C^* التى تتميز بكمية تحرك زاوى كلى J (فى المعتاد J و $I's$ يُشار الى كل منها بالحركة المغزلية للجسيم المقابل) ولايُتوقع بالطبع ان كل تصـــادم بين a و A يمكن ان يؤدى الى حالة حركتها المغزلية تساوى J • وعلـــى فرض ان جسيمات القذائف والهدف غير مستقطبة (Unpolarized) فان احتماليـــة تواجد اى من حالات الحركة المغزلية تساوى الاخرى • واذا ماتذكرنا ان الموجـــــه المستوية التى تمثل جسيم القذيف عبارة عن تطابق غير متوافق لعدد $(2l + 1)$ موجه جزئية لكل منها عدد كمى m_l (راجع معادلة ..) فمعنى ذلـــــــك ان العدد المتاح للحالات الابتدائية يكون عبارة عـــن :

" $(2 I_A + 1)\ (2 I_a + 1)\ (2 \quad + 1)$ " كل منها له احتماليـــــة تواجد تساوى الاخرى • ولكن هذا العدد المتاح يُسْتَخلص منه فقط العـــــــدد $(2 J + 1)$ الذى يقابل عدد الحالات الممكنة للحالة الرنينية • وبذلك تكـــون احتمالية ان اى من جسيمات القذائف يُنتج هذه الحالة الرنينية هو النسبــــــة " $(2 J + 1) / (2 I_a + 1)(2I_A+1)(2 +1)$ " • وبنفس المنطـــق بالنسبة للتفاعل العكسى • واذا ماتذكرنا ان كثافة الحالات الكمية فى الحيز المتـــاح للتفاعل هو :

$$\frac{dn}{dE} = (2I_b + 1)(2I_B + 1) \cdot \frac{4\pi p_b^2 \Omega}{(2\pi\hbar)^3 \ v_b}$$

إذاً يمكننا التعبير عن المقطع المستعرض لهذا التفاعل كمايلى :

$$\sigma_{(a,A)\to(b,B)} = \frac{p_b^2 \Omega'}{\pi \hbar^4 \ v_a v_b} \left| H'_{ab} \right|^2 (2I_b + 1)(2I_B + 1)$$

وبالمثل بالنسبة للمقطع المستعرض للتفاعل العكسى :

$$\sigma_{(b,B\to a,A)} = \frac{p_a^2 \Omega'}{\pi \hbar^4 \ v_a \ v_b} \left| H'_{ba} \right|^2 (2I_a + 1)\ (2I_A + 1)$$

وبما ان العاملة الخاصة بالاقلاق $H^{(1)}$ هيرمينية اذا $\left| H_{ab} \right|^2$ يساوى $\left| H_{ba} \right|^2$

وبذلك نحصل على :

$$\frac{\sigma(a+A \to b+B)}{\sigma(b+B \to a+A)} = \frac{p_b^2}{p_a^2} \cdot \frac{(2I_b + 1)\ (2I_B + 1)}{(2I_a + 1)\ (2I_A + 1)} \qquad (8.9)$$

وهذه هى العلاقة التى كثيرا ماتستخدم للتعرف على كمية الحركة المغزلية لأى من الجسيمات المتفاعلة بمعلومية مايخص الجسيمات الاخرى المشتركة فى التفاعل . وذلك بمجرد الحصول على القيمتين التجريبيتين للمقطع المستعرض لكل من التفاعل والتفاعل العكسى .

مثال محلول (٨ ـ ١) :

استنتج مايساويه المقطع المستعرض للاستطارة المرنة لحزمة الكترونية طاقة حركتها ٥٠ الكترون فولت بواسطة هدف ايدروجينى ذراته فى الحالة الارضية لها $\theta = 60°$.

الحــل :

بما ان طاقة الحركة للحزمة الالكترونية القادمة تجاه الهدف الايدروجينى عالية يُمكن تطبيق تقريب بورن بمعنى ان جهد التفاعل يكون حينئذ صغيرا لدرجة اعتبار

ان دالة الحالة الفعلية الخاصة بالاستطارة ψ يمكن تقريبها واستبدالهـــا بدالة الحالة الاصلية الغير متأثرة بجهد الاقلاق • وبما ان الاستطارة مرنة معـــنى ذلك ان الهدف الايدروجيني كان فى حالة عدد الكم لها 0 وانتقل الى حالـــة عدد الكم لها ايضا صفر • وبما ان دالة الحالة لذرة الايدروجين عموما عبارة عن :

$$\psi_{n\ell m}(\rho) = R_{n\ell}(\rho) \cdot Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

$$= \left\{R_{n\ell}(\rho)\right\} \cdot \left\{\left[\frac{2\ell+1}{4\pi} \cdot \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^{2} \cdot P_{\ell}^{m}(\cos\theta) \cdot e^{im\phi}\right\}$$

إذاً الحالة الارضية " ψ_{10} " هى :

$$\psi_{10} = \left\{ R_{10}(\rho) \right\} \cdot \left\{\left[\frac{0+1}{4\pi} \cdot \frac{0!}{0!}\right]^{1/2} \cdot P_{0}^{0}(\cos\theta) \cdot e^{0}\right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{a_0^3}\right)^{1/2} \cdot 2\, e^{-\frac{\rho}{a_0}} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi} \times 1 \times 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_0^3 \cdot \pi}}\, e^{-\frac{\rho}{a_0}} = \chi_0(\rho)$$

حيث a_0 نصف القطر " بوهر " •

وبما ان سعة الاستطارة تبعا لتقريب بورن عبارة عن :

$$(\Phi_{kn} - \Phi_{k'p}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int dr \int e^{-i\ell \cdot r}\ \chi_p^{*}(\rho) \cdot V(r,\rho)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\ \chi_m(\rho)\, d\rho$$

وأن الاستطارة فى هذه المسألة " مرنة "

$$\therefore f(\Phi_{k0} \rightarrow \Phi_{k'0}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i(\vec{k}-\vec{k}').r}$$

$$\cdot \int V(r,\rho)\ |\chi_o(\rho)|^2\, d\rho$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i(\vec{k}-\vec{k}').\vec{r}}\ dr\ V_{00}(r)$$

حيث

$$V_{oo} = \int V(r,\rho)\ |\chi_o(\rho)|^2\ d\rho$$

$$= \left\{-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o r} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o |r-\rho|}\right\} |\chi_o(\rho)|^2\, d\rho$$

وأن :

$$\int |\chi_o(\rho)|^2 \frac{1}{|r-\rho|}\, d\rho = \frac{1}{\pi a^3}\int_0^\infty \rho^2\, d\rho \cdot \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta)\ .$$
$$\cdot \int_0^{2\pi} e^{-\frac{2\rho}{a_o}} (r^2+\rho^2-2r\rho\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}\, d\phi$$

$$= -\frac{2}{a_o^3 r}\int_0^\infty \rho \left| (r^2+\rho^2-2r\rho\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\right|_{-1}^{+1} e^{-\frac{2\rho}{a_o}}\, d,$$

$$= -\frac{2}{a_o^3 r}\left\{\int_0^r \rho \left| (r-\rho) - (r+\rho)\ e^{-\frac{2\rho}{a_o}}\, d\rho\right| + \right.$$

$$\left. + \int_r^\infty \rho \left| (\rho - r) - (\rho + r)\ e^{-\frac{2\rho}{a_o}}\, d\rho\right| \right\}$$

$$= -\frac{1}{a_o} e^{-\frac{2r}{a_o}} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r} e^{-\frac{2r}{a_o}}$$

$$\therefore V_{oo} = -\frac{e^2}{4\pi \epsilon_o} \left(\frac{1}{a_o} + \frac{1}{r}\right) e^{-\frac{2r}{a_o}}$$

وبذلك تصبح سعة الاستطارة كما يلي :

$$f(\Phi_{k0} \rightarrow \Phi_{\ell 0}) = \frac{2 me^2}{4\pi \hbar^2 (k-k')} \int_0^\infty \left(\frac{1}{a_o} + \frac{1}{r}\right) e^{-\frac{2r}{a_o}} \sin(k-k')r \, dr$$

$$= \frac{2 me^2 \left((8/a_o^2) + (k-k')^2\right)}{4\pi \epsilon_o \hbar^2 \left(\frac{4}{a_o^2} + (k-k')^2\right)^2}$$

حيث هنا :

$$(k-k')^2 = k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \theta = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \sigma_{(\theta)} = \left[\frac{2 me^2 \left(\frac{8}{a_o^2} + 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)}{4\pi \epsilon_o \hbar^2 \left(\frac{4}{a_o^2} + 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2} \right]^2 \qquad (8.10)$$

وفي هذا المثال :

بينما $a_o = 0.523 \times 10^{-10}$ m , $\theta = 60°$,

$k = 3.84 \times 10^{10}$ m^{-1} ,

$$\therefore \sigma(60°) = \left[\frac{2.069 \times 10^{-46}}{4.258 \times 10^{-34}} \right]^2 = 0.236 \text{ barn} .$$

مثـال (٨ـ٢) :

احسب المقطع المستعرض للتفاعل الذى يمثل التقاط نيوترون بطىء (نيوتـــرون حرارى) بواسطة بروتون (نواه ذرة الايدروجين) لينتج فى النهاية نـــــــــــواه " ديوترون Deuteron " وينطلق فوتون جاما ($\hbar\omega$ = 2.11 Mev) .

الحــــل :

فى البداية يلاحظ ان هذا التفاعل يتميز بأنه :

- يختص بثلاث جسيمات اولية " نيوترون ـ بروتون ـ فوتون " بجانب ابسط نـــواه مركبة وهى نواه الديوترون .
- الحالة الابتدائية يشغلها اثنين من الفيرميونات (لان الحركة المغزليـــــة الذاتية لكل منهما عبارة عن $\frac{1}{2}\hbar$) بينما الحالة النهائية يشغلها اثنيـــن من البوزونات (لان الحركة المغزلية للديوترون يساوى الوحدة والحركة المغزلية للفوتون ايضا يساوى $1\hbar$) .
- بما ان النيوترون القذيفة طاقة حركته صغيرة (حوالى " 0.25 eV ") فانـــه يُكتفى بالتعامل مع موجته المتماثلة كرويا (S-Wave) وذلك لان الموجــات ذات عدد الكم $l > 0$ يصبح كمية تحركها الزاوى كبير بالنسبة للبروتـــون الهدف لدرجة ان النيوترون القذيفة يصبح معامل تصادمه " b " اكبر مـــن مدى القوة النووية (Nuclear Force Range) ـ على سبيل المثـــال اذا فرض ان طاقة حركة النيوترون ٠,٢٥ الكترون فولت فان سرعته تكـــــــــون ٢ x ١٠^٦ متر فى الثانية وعلى ذلك اذا فرض ان $l = 1$ فان معامـــــل التصادم b يساوى ١٠^-١٠ متر . اى مائة الف مرة قدر مدى القـــــوة النووية (وبالتالى لايكون هناك اى تفاعل لمثل هذه الموجات مع البروتـــــون الهدف) . وعلى ذلك يكون متجه كمية حركة النيوترون الزاوية ناتج فقـــــط

من حركته المغزلية $(\frac{1}{2}\hbar)$ وفى نفس الوقت الحركة المغزلية للبروتون الهـــدف $(\frac{1}{2}\hbar)$ • وبذلك يكون المتجه المحصله الذى يمثل الحالة الابتدائية للتفاعل الموضح هو $1\hbar$ او $0\hbar$ •

اما بالنسبة للحالة النهائية فيلاحظ ان نواه الديوترون حـركتها المغزلية($1\hbar$) كما اشرنا منذ قليل • وهذا نتيجة تقارن الحركة المغزلية لكل من الجسيمين الاوليين المكونين لها (البروتون S_p والنيوترون S_n) مع ملاحظة ان الحركة المداريـة $l = 0$ وان التقارن يحدث بين $S_p = +\frac{1}{2}\hbar$ و $S_n = +\frac{1}{2}\hbar$ لتنتج الحالة الكمية $^3S_1$ لنواه الديوترن (S لان $l = 0$ ، ١ يشير الـــى $(+\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1)$ ، 3 يشير الى المضاعفات التى تقابل $2 \times 1 + 1$ لعدد الحالات المتاحة نتيجة لعدد الكم الكلى ١) بينما التقارن بين $+\frac{1}{2}\hbar$ و $-\frac{1}{2}\hbar$ غير متاح هنا فى حالة الديوترون لان التقارن الذى يؤدى الى عـــدد كمى كلى يساوى $0\hbar$ لا ينتج عنه حالة مرتبطة مثل نواه الديوترون •

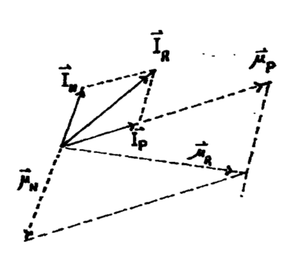
على هذا الاساس فان الانتقالات الكمية الممكن التفكير فيها بالنسبة لهـــذا التفاعل $D(p,\gamma)n$ هى :

^1S (شريط متصل) —— عن طريق تأثير العزم المغناطيس المصاحب للحركة المغزلية ——→ ^3S

، ^3S (شريط متصل) ————→ ^3S

ولكن خاصية التعامدية لدوال الحالة ينتج عنها عدم امكانية تحقيق الانتقـــال الثانى لانهما (الحالة الابتدائية والحالة النهائية) ينتميان لقيم ايجينية مختلفة •

وحيث ان اساسيات ميكانيكا الكم المرتبطة بخاصية التماثل لانعكاس احداثيات الحيز (Parity) تدعو الى استبعاد ان يتم التفاعل بالنسبة للانتقال (S ← S) عن طريق شارة المزدوجات الكهربية (Electric Dipoles) لذلك فان التفاعل الاول يتم كما هو مشار اليه عن طريق شارة المزدوجات المغناطيسية والشكل التالى يوضح ذلك كما يلى :



رسم توضيحى لدوران عزم المزدوج المغناطيسى المحصل μ_R حول محور الحركة المغزلية الناتج عن تقارن الحركة المغزلية للنيوترون القذيفة مع الحركة المغزلية للبروتون الهدف (الحالة الابتدائية للتفاعل (n (p,γ) D)

وفى هذا الشكل التوضيحى فان :

الحركة المغزلية للنيوترون = $I_N = \frac{1}{2}\hbar$ =

العزم المغناطيسى للنيوترون ونلاحظ ان اتجاهه عكس اتجاه I_N إذ أن μ_N = μ_N سالب (ماجنيتون نووى 1.9-).

الحركة المغزلية للبروتون $I_p = \frac{1}{2}\hbar$ =

العزم المغناطيسى للبروتون ونلاحظ ان اتجاهه فى نفس اتجاه I_p اذ ان μ_p = μ_p موجب ويساوى 2.7+ ماجنيتون نووى .

الحركة المغزلية المحصلة للبروتون والنيوترون = I_R

(Resultant Angular Momentum)

العزم المغناطيسى المحصل (Resultant Magretic Moment) = μ_R

وعلى هذا الاساس نطبق العلاقة الخاصة " بمعدل الانتقال " فى نظريـــــة الاقلاق على هذا التفاعل الذى وضح الان انه يتم عن طريق تفاعل المزدوج المغناطيسى وتـساوى :

$$\frac{4}{3}\frac{\omega^3}{\hbar C^3}\left| H^{(1)} \right|^2$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\omega^3}{\hbar C^3}\left| \mu_{f,i} \right|^2 \qquad (8.12)$$

حيث

$$= \frac{\text{طاقة الانتقال من الحالة الابتدائية الى الحالة النهائية}}{\hbar}$$

$$= \frac{2.23 \text{ Mev}}{\hbar} \qquad (8.13)$$

$$\frac{\text{طاقة الربط للنواه الديترون (على اساس ان طاقة الحركة للنيوترون القذيفة صغير بالنسبة لها)}}{\hbar}$$

عنصر المصفوفة التى تربط الحالة الابتدائية i (Initial) = $\left| \mu_{f,i} \right|$ بالحالة النهائية f (Final) عن طريق تأثير عزم المـــــزدوج المغناطيسى μ

ويلاحظ ان الحالة الابتدائية للمجموعة (n.p) يمكننا التعبير عنها كما يلى :

$$\Psi_i = \Psi_{(1S)} = \frac{i(r)}{r}\left[\frac{(+-) - (-+)}{\sqrt{2}} \right] \qquad (8.14)$$

بينما الحالة النهائية للمجموعة (d, γ) يمكننا التعبير عنها بالصورة التالية :

$$\psi_f = \psi_{(^3S)} = \frac{u(r)}{r} \cdot \begin{bmatrix} (++) \\ \left\{ \frac{(+-) + (-+)}{\sqrt{2}} \right\} \\ (--) \end{bmatrix} \qquad (8.15)$$

وفيها

(+ -) تعنى ان جزء الدالة الموجية الخاصة بالحركة المغزلية ترمز الى ان الحركة المغزلية للبروتون اتجاهها الى اعلى ↑ (+) بينما الحركة المغزلية للنيوترون اتجاهها الى اسفل (-) .. وهكذا بالنسبة لباقي الرموز .

بينما جزء الدالة الموجية الخاصة باحداثيات الحيز (r) نلاحظ هنا انها لاتعتمد على الزوايا (θ , ϕ) بما اننا نتعامل مع دوال تتميز بتماثل كرى ($\ell = 0$) وهى هنا عبارة عن ($j(r) / r$) بالنسبة للحالة الابتدائية بينما تساوى ($u(r)/r$) بالنسبة للحالة النهائية وهذه هى الحل الخاص بالنواه الديوترون المقابلة للجهد البئرى $V = -21$ Mev الخاص بتفاعل البروتون والنيوترون للحالة الثلاثية ^3S .

اما ($j(r) / r$) فهى الجزء الذى يعنينا من الموجه المستوية التى تمثل النيوترون القادم تجاه الهدف والتى رأينا قبل ذلك انها عبارة عن (راجع معادلة (7.75)) :

$$e^{ikz} = \sum_{\ell} (2\ell + 1)\ i^{\ell}\ \left(\frac{\pi}{2\ kr}\right)^{1/2} J_{\ell+1/2}(kr)\ P_{\ell}\ (\cos\theta)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2\ kr}\right)^{1/2} J_{1/2}(kr) \qquad (8.16)$$

وتوضح نتائج التجارب الخاصة باستطارة النيوترونات بواسطة البروتونـــــات ان دالة بسل التي نحن بصددها عبارة عن

$$j(r) = \frac{1}{k} \sin (kr + |a|) \sim r + |a_1| \qquad (8.17)$$

بقي لدينا اذاً أن نحسب عنصر المصفوفة $\vec{\mu}_{f,i}$ حيث :

$$\vec{\mu}_{f,i} = \int \psi_f \vec{\mu} \psi_i \, d\tau \qquad (8.18)$$

وفيها متجه المزدوج المغناطيسي عبارة عن

$$\vec{\mu} = \mu_p (\sigma_x^p \vec{i} + \sigma_y^p \vec{j} + \sigma_z^p \vec{k})$$

$$+ \mu_N (\sigma_x^N \vec{i} + \sigma_y^N \vec{j} + \sigma_z^N \vec{k}) \qquad (8.19)$$

حيث σ_x^p ... الخ عبارة عن عاملات باؤلي (Pauli Operators) للحركـــة المغزلية (راجع صفحة ٥٦) • ومن صفات هذه العاملات انها تؤثر على الـــدوال المرجيه الخاصة بالحركة المغزلية للبروتون "$(p)_+ = \binom{1}{0}$" وللنيوتـــــرون "$(n)_+ = \binom{1}{0}$" على النحو التالي (مع ملاحظة ان العامـــلات " σ_x^p و σ_y^p و σ_z^p " تؤثر فقط على دوال البروتون تاركة دوال النيوترون كما هي • بينما " σ_x^N و σ_y^N و σ_z^N " تؤثر فقط على دوال النيوترون تاركة دوال البروتون كما هي :

$$\sigma_x^p((p)_+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (p)_- \qquad (8.20)$$

$$\sigma_x^p((p)_+ (n)_-) = ((p)_- (n)_-) = (- -) \qquad (8.21)$$

أى أن

$$\sigma_x^p \; (+\,-) \; = \; (-\,-) \qquad (8.21)$$

وهكذا .

وعلى هذا الاساس لنحسب على سبيل المثال المركبه $(\mu_{f,i})_z$:

$$\left|(\mu_{f,i})_z\right|^2 = \left|\int \psi_f^* \; (\mu_p \sigma_z^p + \mu_N \sigma_z^N) \, \psi_i \; d\tau \right|^2$$

$$= (\mu_p - \mu_N)^2 \left\{ \int_0^\infty j(r) \; u(r) \; . \; 4\pi \, dr \right\}^2 \qquad (8.22)$$

وحيث انه لايوجد اى تفضيل احصائى بين المحاور الثلاث

$$\therefore \; \left|(\mu_{fi})_x\right|^2 = \left|(\mu_{fi})_y\right|^2 = \left|(\mu_{fi})_z\right|^2 \qquad (8.23)$$

$$\therefore \; \left|\mu_{fi}\right|^2 = 3 \left|(\mu_{fi})_z\right|^2 \qquad (8.24)$$

$$\therefore \; \sigma_{[n(p,\gamma)d]} = \frac{1}{v} \cdot \frac{16\,\pi^2 \omega^2}{\hbar \, c^3} \; (\mu_p - \mu_N)^2 \left[\int_0^\infty j(r) \; u(r) \; dr \right]^2$$

حيث ادخل المعامل $((1/(1/4))^2$ نتيجة ان ربع الشريط المتصل من الحـــالات الابتدائية هو فقط الذى يشارك فى التفاعل بين النيوترون والبروتون الهدف وهـــــو النسبة التى تمثل الحالات المفردة المتماثلة كريا:

$$\int_0^\infty j(r)\ u(r)\ dr = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_0^\infty (|a_1| + r)\ e^{-kr}\ dr$$

$$= \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \left(\frac{|a_1|}{k} + \frac{1}{k^2} \right)$$

$$\therefore \sigma_{[n(p,\gamma)d]} = \frac{1}{v} \cdot \frac{16\pi^2 \omega^3}{\hbar C^3} (\mu_p - \mu_N)^2 \cdot \frac{k}{2\pi} \left(\frac{|a_1|}{k} + \frac{1}{k^2}\right)^2$$

وباستخدام قيمة متجه العدد الموجى على انه " $k = 2.26 \times 10^{14}\ m^{-1}$ " بينمـــا قيمة " طول الاستطارة (Scattering Length) على انــــــه :

" $a_1 = -2.32 \times 10^{-14}\ m$ "

$$\therefore \left[\sigma_{[n(p,\gamma)d]}\right]_{th.} = \frac{6.4 \times 10^{-22}}{v} = \frac{6.4 \times 10^{-22}}{2.2 \times 10^3}$$

$$= 0.29 \times 10^{-24}\ cm^2 = 0.29\ barns \qquad (8.25)$$

بينما القياسات التجريبية لهذا التفاعل تؤدى الى النتيجة العملية التالية

$$\left[\sigma_{[n(p,\gamma)d]}\right] = (\ 0.30 \pm 0.011\ )\ \ barns \qquad (8.26)$$

مثـال (٨ـ٣) :

فسر السبب فى ان النواه الديوترون فى الحالة الارضية لها (Its Ground State) ـ وهى الحالة الوحيدة المرتبطة التى تجمع بين بروتون واحد ونيوترون واحد ـ عبارة عن حالة مفردة (Singlet State) فى حيز الحركة المغزلية النظيرية •

الحـــل :

الحالة الارضية للديوترون عبارة عن خليط من $^3S_1$ و $^3D_1$ ومعنى ذلـــك أنه خليط من " $\ell = 0$ " و " $\ell = 2$ " وبالتالى فان الجزء من الدالة الموجيـة الخاص باحداثيات الحيز (x , y , z) يتصف بالتماثل حيث ان " $(-1)^0$ ، $(-1)^2$ " يساوى كل منهما " +1 " اى زوجى (EVEN) .

بجانب ذلك فان الجزء من نفس الدالة الموجية للديوترون الخاص بالحركـــــة المغزلية التى توضح النتائج العملية انها " $1\hbar$ " يتصف ايضا بالتماثل بالنسبـة لتبادل الحركة المغزلية للنيوكلونين المكونين للديوترون .

ولكن مبدأ الاستبعاد لباولى (Pauli Exclusion Principle) يوضح وجوب ان تكون الدالة الموجية بأكملها (ψ) والتى تمثل هذه المجموعـــة الفيزيائية (الديوترون) المكونة من اثنين من الفيرميونات ـ غير متماثلة بالنسبـــة لتبادل النيوكلونين المكونين لها وبالتالى يجب ان يكون متجه الحركة المغزلية النظيريـة لاحدهما فى اتجاه مضاد للمتجه الخاص بالاخر . اى ان الديوترون يجب ان يتميـــز بما يلى :

$$\tau = \tau_z = 0 \qquad (8.27)$$

أى حاله مُفرده فى حيز الحركه المغزليه النظيريه .

مثـــال (٨ـ٤) :

فسر السبب فى عدم حدوث التفاعل النووى التالى :

$$d + d \longrightarrow \alpha + \pi^0 \qquad \text{"??"}$$

الحــــل :

هذا التفاعل غير مسموح بحدوثــه لأن التفاعلات النووية التى من هذا القبيــــل تفاعلات قوية (Strong Interactions) بمعنى انها يجب أن تتفق مع قانـــــون حفظ كمية الحركة المغزليه النظريه الكليه " τ " بجانب مركبتها " τ_z " . وبمـــا ان التفاعل اعلاه يتضح ان الحالة الابتدائية تتميز بأن لها " $\tau = 0$ " بينما الحالـــة النهائية تتميز بأن لها " $\tau = 1$ " إذًا لايمكن ان يتم كتفاعل قوى .

مثـــال (٨ـ٥) :

وَضِّح كيفية تعيين الحركة المغزلية للميزون بَاىْ (pi - Meson) باستخدام التفاعلين النوويين التاليين :

$$p + p \longrightarrow d + \pi^+ \qquad (8.28)$$

$$\pi^+ + d \longrightarrow p + p \qquad (8.29)$$

الحــــل :

بتطبيق معادلة على التفاعل (pp) نجد ان :

$$\sigma_{(pp \to d\pi^+)} = \frac{p^2}{v_p\, v_\pi} \cdot \left| H^{(1)}_{f,i} \right|^2 (2\, S_\pi + 1)(2\, S_d + 1) \qquad (8.30)$$

حيث " $\vec{p}_\pi = -\vec{p}_d$ " فى نظام مركز الكتلة ، " $S_d = 1$ " .

بينما تطبيق نفس المعادلة على التفاعل ($\pi^+ d$) يؤدى الى :

$$\sigma_{(\pi^+ d \to pp)} = (½) \frac{p_p^2}{v_\pi\, v_p} \left| H^{(1)}_{f',i'} \right|^2 (2\, S_p + 1)^2 \qquad (8.31)$$

ونذكر أنفسنا انه عند طاقة محددة فى نظام مركز الكتلة فان " مبدأ الاتـــــزان التفصيلى (Detailed-Balance Principle) تؤكد ان لكلا التفاعليـــن " الامامى pp " و " العكسى π^+d " الكميتين ($|H_{fi}^{(1)}|^2 / \mathcal{V}_i \mathcal{V}_f$) متساويتان • اما المعامل " ½ " فقد نتج من ان عملية اجراء التكامل على معامـــل حيز الطور (Phase Space Factor) — dn'/dE —على نصف الحيـــز المتاح يعطى جميع الحالات الممكنة لتواجد اثنين من الجسيمات المتشابهة وهمـــا البروتونين وعلى ذلك :

$$\frac{\sigma(pp \rightarrow \pi^+ d)}{\sigma(\pi^+ d \rightarrow pp)} = 2 \cdot \frac{(2 S_\pi + 1)(2 S_d + 1)}{(2 S_p + 1)^2} \cdot \frac{p_\pi^2}{p_p^2} \qquad (8.32)$$

ولقد اوضحت التجارب العملية ان :

$$\sigma(pp \rightarrow \pi^+ d) = (3.1 \pm 0.3) \text{ m.b}$$

$$\sigma(\pi^+ d \rightarrow pp) = (0.18 \pm 0.06) \text{ m.b}$$

عند استخدام قذائف بروتونية ذات طاقة (340 Mev) اى ان طاقة حركـــة الميزون باى فى نظام مركز الكتلة يساوى $p_\pi c = 22.3$ Mev • والاخـــرى باستخدام ميزونات طاقة حركتها 23 Mev (وهذه تقابل طاقة حركة للبروتـــون فى نظام مركز الكتلة مساوية للقيمة 85 Mev) :

أى ان :

$$\frac{p_\pi}{p_p} = \sqrt{\frac{2\, m\ \ E}{2\, m_p\, E_p}} \qquad 0.20$$

$$\therefore\ (0.18 \text{ mb}) = (3.1 \text{ mb}) \cdot (\tfrac{3}{2}) \cdot (2 S_\pi + 1) \cdot (0.04)$$

$$\therefore \quad 2S_\pi + 1 \sim 1$$

$$\therefore \quad S_\pi = 0 \qquad (8.33)$$

مثـــال (٨-٦) :

احسب النسبة بين التفاعلين النوويين التاليين اذا علم ان الطاقة الكلية فـــى نظام مركز الكتلة لكل منهما مساو للآخر :

$$\frac{\sigma\,(p + p \rightarrow d + \pi^+)}{\sigma\,(n + p \rightarrow d + \pi^0)}$$

الحـــل :

اول مانلاحظه في هذا المثال ان الحالة النهائية لأى من التفاعلين الموضحيـن تتميز بأن لها نفس مضاعفات كمية الحركة المغزلية • معنى ذلك أنه بقى لنا ان نركـــز النقاش على تأثير كمية الحركة المغزلية النظيرية • وفى هذا الخصوص يتضح لنا مايلى :
كمية الحركة المغزلية النظيرية للحالة النهائية لكل منهما تساوى الوحدة " $\tau = 1$ " •
كمية الحركة المغزلية النظيرية للحالة الابتدائية للتفاعل الاول (pp) تساوى الوحدة كذلك •
كمية الحركة المغزلية النظيرية للحالة الابتدائية للتفاعل الثانى (np) ناتجـــة من انطباق " $\tau = 0$ " و " $\tau = 1$ " -راجع معادلة

$$\therefore \quad \Phi_{1,0} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left[\psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} + \psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right]$$

$$\Phi_{0,0} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left[\psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} - \psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right]$$

$$\Phi_{1,0} - \Phi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ \left[\Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} + \Psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right] - \left[\Psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} - \Psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\,\Psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\Psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right]$$

$$\therefore \Psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Phi_{1,0} - \Phi_{0,0}\right]$$

وبما ان المركبة $(\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_{0,0})$ لاتلعب اى دور هنا لأن كما رأينا الحالة النهائية للتفاعلين لها " $\tau = 1$ " والحالة (πp) لها سعة " $1/\sqrt{2}$ " من تلك الخاصة بالحالة (pp) .

وبما ان المقطع المستعرض يتناسب مع مربع السعة اذاً يتضح ان :

$$\frac{\sigma\,(pp \rightarrow d\ \pi^{+})}{\sigma\,(np \rightarrow d\ \pi^{0})} = 2 \qquad (8.33)$$

انتهى بفضل الله سبحانه وتعالى

" وان تعُدّوا نعمة الله لاتحصوها "

والحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين

أ.د. عبد الرحمن فكرى　　　　أ.د. محمد عبد الهادى

القاهرة

أول المحرم ١٤١٣ ـ ٢ يوليو ١٩٩٢

(REFERENCES) المراجـــع

TITLE	AUTHOR	YEAR
Lectures on Quentum Mechanics	BAYM	1969
Elementary Nuclear Physics	BETHE and MORRISON	1956
Nuclear Physics "Theoretical"	BLATT and WEISSKOPF	1952
Quantum Mechanics	BOHM	1951
Nuclear Structure	BOHR and MOTTELSON	1969
Atomic Physics	BORN	1955
Theory of Atomic Spectra	CONDON and SHORTLEY	1935
Method of Mathematical Physics	COURANT and HILBERT	1953
Quantum Mechanics	DIRAC	1955
Angular Momentum in Quantum Mechanics	EDMONDS	1957
Nuclear Physics	FERMI	1950
The Feynman Lectures in Physics	FEYNMAN,LEIGHTON and SANDS	1965
Problems of Modern Physics	FRENCH	1958
ميكانيكا الكم " الجـزء الاول "	محمد عبدالبادى وعبدالرحمن فكرى	١٩٨٦
Quantum Mechanics	GHATAK and LOKANATHAN	1975
Electronic and Ionic Impact Phenomena	GILBODY	1969
Classical Mechanics	GOLDSTEIN	1951
The Optical Model of the Nucleus	HODGSON	1963

The Physics of Elementary Particles	JACKSON	1958
Theoretical Physics	JOOS	1958
Fundamental Principles of Quantum Mechanics	KEMBLE	1939
Int. to Solid State Physics	KITTEL	1971
Quantum Mechanics	KRAMERS	1970
Quantum Mechanics	LANDAU and LIPSHITZ	1968
Fundamentals of Elementary Particle Physics	LONGO	1973
Classical Mechanics of Particles and Systems	MARION	1970
Physics of Nuclei and Particles	MARMIER and SHELDON	1969
Quantum Mechanics	MATHIEWS	1963
Quantum Mechanics	MERZBACHER	1961
Methods of Theoretical Physics (I,II)	MORSE and FESHBACH	1953
The Theory of Atomic Collisions	MOTT and MASSEY	1949
Classical Electricity and Magnetism	PANOPSKY	1955
Introduction to Quantum Mechanics	PARK	1974
Introduction to High Energy Physics	PERKINS	1972

Molecular Beams	RAMSEY	1963
Int. to Modern Physics	RICHTMEYER and COOPER	1969
Quantum Mechanics	SCHIFF	1956
Modern Analysis	WHITTAKER and WATSON	1927

رقم الايـــــداع بدار الكتب

٩١٩٤/ ١٩٩٢ م

997-00-3971-3

